



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São João da Boa Vista

Manual de Laboratório de Física II

Priscilla A. de Sousa Silva • **Mirian Paula dos Santos**
Professora Assistente de suporte acadêmico

*Para uso na disciplina Laboratório de Física II
ministrada no primeiro semestre de 2018*

Sumário

1	Equilíbrio de um corpo rígido	5
1.1	Objetivo	5
1.2	Conceitos	5
1.3	Materiais e métodos	9
1.3.1	Materiais	9
1.3.2	Procedimento experimental	9
1.4	Para o relatório	10
2	Momento de Inércia	11
2.1	Objetivo	11
2.2	Conceitos	11
2.3	Materiais e métodos	15
2.3.1	Materiais	15
2.3.2	Procedimento experimental	16
2.4	Para o relatório	16
3	Cinética e dinâmica de rotação de um corpo rígido	19
3.1	Objetivo	19
3.2	Conceitos	19
3.3	Materiais e métodos	21
3.3.1	Materiais	21
3.3.2	Procedimento experimental	21
3.4	Para o relatório	22
4	Momento Angular	23
4.1	Objetivo	23
4.2	Conceitos	23
4.3	Materiais e métodos	27
4.3.1	Materiais	27
4.3.2	Procedimento experimental	27
4.4	Para o relatório	29

5	Pêndulo simples	31
5.1	Objetivo	31
5.2	Conceitos	31
5.3	Materiais e métodos	33
5.3.1	Materiais	33
5.3.2	Procedimento experimental	33
5.4	Para o relatório	34
6	Pêndulo físico	35
6.1	Objetivo	35
6.2	Conceitos	35
6.3	Materiais e métodos	37
6.3.1	Materiais	37
6.3.2	Procedimento experimental	37
6.4	Para o relatório	38
7	Sistema massa-mola	39
7.1	Objetivo	39
7.2	Conceitos	39
7.3	Materiais e métodos	42
7.3.1	Materiais	42
7.3.2	Procedimento experimental	42
7.4	Para o relatório	43
8	Densidade de Líquidos	45
8.1	Objetivo	45
8.2	Conceitos	45
8.3	Materiais e métodos	48
8.3.1	Materiais	48
8.3.2	Procedimento experimental	48
8.4	Para o relatório	49
9	Princípio de Arquimedes	51
9.1	Objetivo	51
9.2	Conceitos	51
9.3	Materiais e métodos	52
9.3.1	Materiais	52
9.3.2	Procedimento experimental	53
9.4	Para o relatório	53

10 Dilatação térmica	55
10.1 Objetivo	55
10.2 Conceitos	55
10.3 Materiais e métodos	56
10.3.1 Materiais	56
10.3.2 Procedimento experimental	56
10.4 Para o relatório	57
11 Dilatação térmica	59
11.1 Objetivo	59
11.2 Conceitos	59
11.3 Materiais e métodos	61
11.3.1 Materiais	61
11.3.2 Procedimento experimental	63
11.4 Para o relatório	64
Apêndice I	66
Apêndice II	72

Experimento 1

Equilíbrio de um corpo rígido

1.1 Objetivo

Estudar as condições de equilíbrio de uma barra rígida uniforme e localizar o seu centro de massa.

1.2 Conceitos

Considere um conjunto finito de N partículas de massa m_i , $i = 1, 2, \dots, N$ arranjadas de tal forma que a distância entre duas partículas i e j quaisquer não muda com o tempo.

Pode-se definir um ponto chamado **centro de massa** que se move como toda a massa do sistema estivesse concentrada nele e todas as forças externas estivessem aplicadas nele, de forma que o movimento global do sistema de partículas pode ser descrito em termos deste ponto.

A posição do centro de um sistema de partículas de massa $M = \sum_{i=1}^N m_i$ é dada por

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i. \quad (1.1)$$

Objetos do dia a dia como uma mesa, um lápis ou um cabo de vassoura, podem ser aproximados por sistemas de muitas partículas com distribuição contínua de massa, isto é, são formados por elementos infinitesimais de massa dm com separação muito pequena entre eles. Se a distância entre cada par de elementos infinitesimais permanece constante com o tempo, o objeto é chamado de **corpo rígido**.

Para um corpo rígido de massa M , a Eq. (1.1) pode ser reescrita como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm. \quad (1.2)$$

Um corpo é dito homogêneo quando sua massa específica (ou densidade) é a mesma para todos os elementos infinitesimais que o formam. O centro de massa de qualquer corpo homogêneo simétrico situa-se no seu ponto, eixo ou plano de simetria.

Exemplo. Uma barra de ferro de massa M e comprimento h é um corpo rígido uniforme simétrico. A barra, mostrada na Fig. 1.1 pode ser vista como um cilindro cuja altura é muito maior que o raio de suas faces. O eixo de simetria de um cilindro passa pelo centro das suas faces. Alinhando o eixo de simetria com o eixo x na figura abaixo, temos que $y_{cm} = z_{cm} = 0$. Assim, apenas precisamos calcular a integral em x

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x dm.$$

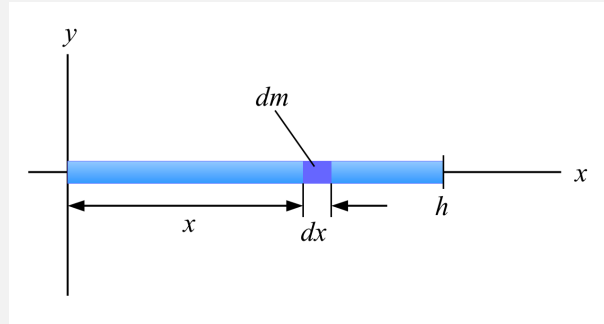


Figura 1.1: Barra uniforme.

Podemos escrever a massa por unidade de comprimento como $\lambda = M/h$, de forma que para cada elemento infinitesimal dx teremos $dm = \lambda dx$. Substituindo na integral temos

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^h x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h = \frac{\lambda h^2}{2M}.$$

Finalmente, substituindo $\lambda = M/h$, encontramos $x_{cm} = \frac{h^2}{2M} \left(\frac{M}{h} \right) = \frac{h}{2}$.

Cada elemento de massa de um corpo sofre a ação da força gravitacional. A resultante de todas essas forças equivale ao peso $\vec{P} = M\vec{g}$ do corpo agindo em um ponto chamado **centro de gravidade** ou **baricentro**. Se a aceleração da gravidade $\vec{g}$ é a mesma ao longo da distribuição de massa de um corpo, o centro de gravidade coincide com o centro de massa. No entanto, enquanto o centro de massa é uma propriedade inerente de um dado corpo rígido, em um campo gravitacional não uniforme, a posição do centro de gravidade poderá depender da orientação do corpo.

Exemplo.

- Em um campo gravitacional uniforme o centro de gravidade e o centro de massa de uma esfera coincidem com seu centro geométrico.
- Em edifícios muito altos o centro de gravidade está ligeiramente abaixo do centro de massa, uma vez que a efeito da atração gravitacional é maior nos pontos mais baixos do prédio.
- Em um satélite orbitando um planeta em órbita baixa na ausência de outras forças um pequeno gradiente (variação) no campo gravitacional pode causar um torque que tende a alinhar o eixo mais longo do satélite com a força peso na direção radial do planeta.

Em um corpo apenas sob ação da atração gravitacional, uma força com mesmo módulo e direção que o peso do corpo e com sentido contrário aplicada no seu centro de gravidade manterá o corpo em equilíbrio.

Um corpo está em **equilíbrio** se tem velocidades linear e angular constante em relação a um observador em um referencial inercial. Se as velocidades são nulas, o corpo é dito em **equilíbrio estático**.

As condições necessárias para o equilíbrio de um corpo são:

1. A resultante das forças externas agindo sobre o corpo é nula:

$$\vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad (1.3)$$

2. A resultante dos torques externos agindo sobre o corpo é nula:

$$\vec{\tau}_{res} = \sum \vec{\tau}_{ext} = 0 \quad (1.4)$$

A primeira condição implica que $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, portanto $\vec{p} = cte.$ e temos equilíbrio translacional. Já a segunda condição implica que $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, portanto $\vec{L} = cte.$ e temos equilíbrio rotacional.

Relembrando. Torque ($\vec{\tau}$) é uma tendência de rotação (ou torção) em torno de um eixo quando um corpo é submetido a uma força ($\vec{F}$):

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

$$\tau = rF \sin \varphi.$$

A Fig. 1.2 ilustra a força responsável pelo torque.

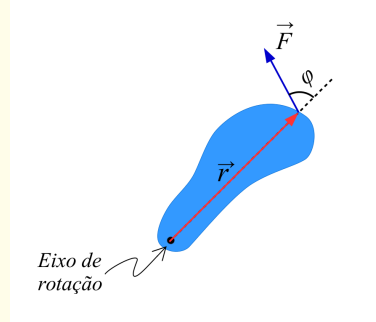


Figura 1.2: Torque.

Exemplo. Uma barra uniforme de $l = 40$ cm de comprimento e massa igual a $m_0 = 330$ g fica na posição horizontal apoiada sobre um fulcro quando dois pesos de massas $m_1 = 60$ g e $m_2 = 110$ g são pedurados nas extremidades da barra um de cada lado do fulcro, conforme ilustrado na Fig. 1.3.

a) Qual é o módulo da força normal $\vec{n}$ exercida pelo fulcro sobre a barra?

Primeiro, desenhamos as forças que agem sobre a barra. Então, de $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ temos

$$n - m_0g - m_1g - m_2g = 0,$$

de forma que

$$n = (m_0 + m_1 + m_2)g.$$

Substituindo os valores, temos que

$$n = (330 + 60 \times 10^{-3} \times 10^{-3} + 110 \times 10^{-3})(9,8) = 4,9 \text{ N}.$$

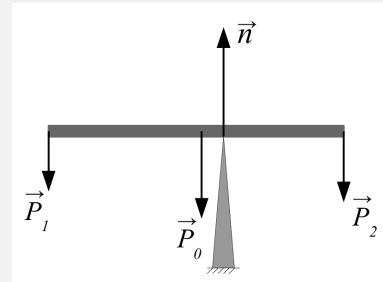


Figura 1.3: Esquema das forças que agem sobre a barra.

b) Qual é a distância da extremidade esquerda da barra até o fulcro?

Denotando a distância requerida por x e escolhendo um eixo de rotação perpendicular ao plano do papel passando pela extremidade esquerda podemos escrever

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0 \text{ como } -P_0 \frac{l}{2} + nx - P_2 l = 0, \text{ onde } P_0 = m_0g \text{ e } P_2 = m_2g. \text{ Assim,}$$

$$nx = m_0g \frac{l}{2} + m_2gl$$

e

$$x = \frac{lg}{n} \left(\frac{m_0}{2} + m_2 \right) = \frac{40 \times 9,8}{4,9} \left(\frac{330 \times 10^{-3}}{2} + 110 \times 10^{-3} \right) = 22 \text{ cm}.$$

1.3 Materiais e métodos

1.3.1 Materiais

- Suporte universal
- Braço horizontal
- Gancho em forma de S para a barra
- Barra de metal (± 30 cm)
- 4 elásticos
- 4 ganchos metálicos
- 12 discos de metal acopláveis aos ganchos (± 50 g cada)
- 1 disco de massa desconhecida
- Marcador para retroprojektor
- Régua e trena
- Balança semianalítica



Figura 1.4: Visão esquemática da montagem do experimento.

1.3.2 Procedimento experimental

- a) Inicialmente identifique e pese todos os componentes que serão utilizados no experimento (barra, ganchos, elásticos, massas). Meça o comprimento da barra metálica;
- b) Ajuste a barra metálica sobre o gancho em forma de S de forma a equilibrar o sistema. Marque com a caneta o ponto central tomando-o como posição de apoio;
- c) Encaixe um elástico de cada lado da barra e em cada elástico encaixe um gancho. Adicione os discos metálicos aos ganchos de forma que as massas suspensas em cada lado sejam diferentes. Movimente delicadamente os elásticos de forma a equilibrar novamente o sistema, como mostra a Fig. 1.4;
- d) Anote a massa dos conjuntos (massa + gancho + elástico) e meça suas posições, em relação ao ponto de apoio, no instante do equilíbrio;
- e) Repita o procedimento dos itens “c” e “d” para outras duas combinações de massas;
- f) Utilizando agora um arranjo com dois conjuntos em uma extremidade e um conjunto apenas na outra extremidade da barra, suspenda duas massas diferentes;

- g) Anote os valores dos conjuntos (massa + gancho + elástico) e meça suas posições, em relação ao ponto de apoio, no instante do equilíbrio;
- h) Repita os itens “f” e “g” para uma nova combinação de massas;
- i) Solicite ao técnico uma massa de valor desconhecido. Em uma das extremidades da barra, suspenda esta massa desconhecida juntamente com outras duas massas no mesmo gancho. Na outra extremidade suspenda uma combinação de no mínimo 3 ganchos com massas variadas. Anote as posições e os valores dos conjuntos suspensos;
- j) Agora, suspenda um conjunto com massas entre 100 g e 200 g e posicione-o no limite de uma das extremidades da barra, a outra extremidade da barra fica sem nada. Movimente a barra em relação ao seu ponto de apoio até estabelecer uma nova posição de equilíbrio. O torque devido à massa suspensa é agora equilibrado pelo torque da barra. Anote o valor da massa do conjunto suspenso e também a nova posição de apoio da barra;

1.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Determine os torques no sentido horário e anti-horário para os itens “d”, “e”, “g” e “h” da Seção 1.3.2. Em cada caso, compare-os calculando os erros percentuais.
- Calcule o peso P_b da barra e compare-o com a massa obtida pesando em balança de laboratório. Explícite o método de cálculo.
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 1: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 1: mecânica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

GASPAR, A.; Física, volume 1: mecânica. São Paulo: Editora Ática, 2002.

SCHAUM, D.; VAN DER MERWE, C.W.; Física Geral. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

Experimento 2

Momento de Inércia

2.1 Objetivo

Determinar experimentalmente o momento de inércia de um disco.

2.2 Conceitos

O **momento de inércia** I de um sistema de N partículas com respeito a um eixo de rotação é definido por

$$I \equiv \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (2.1)$$

onde m_i é a massa de cada partícula e r_i sua distância até o eixo de rotação.

No caso de um corpo rígido formado por muitas partículas com distribuição contínua de massa elementos infinitesimais de massa dm temos que a soma da Eq. (2.1) se torna uma integral sobre o volume do corpo:

$$I \equiv \int r_i^2 dm. \quad (2.2)$$

Pode-se usar a relação $\rho = M/V$, onde M é a massa do corpo e V seu volume, para escrever dm em função da massa específica ρ , isto é $dm = \rho dV$. Assim, a Eq. (2.2) pode se reescrita como

$$I \equiv \int \rho r_i^2 dV.$$

Se o corpo é homogêneo, ρ é constante e o cálculo do momento de inércia reduz-se a avaliar a integral para uma geometria conhecida.

No SI, o momento de inércia tem dimensões de $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Esta grandeza corresponde a uma medida da resistência de um corpo a ser colocado em movimento de rotação ou ter sua velocidade angular alterada, portanto, o momento de inércia pode ser considerado o análogo da massa para rotações.

O cálculo do momento de inércia de um corpo depende tanto da massa do corpo como da distribuição de dessa massa em torno de um eixo de rotação específico. Assim, um corpo pode ter vários momentos de inércia de acordo com diferentes eixos de rotação considerados.

Exemplo. O momento de inércia de um cilindro maciço uniforme de massa M e raio R com relação a um eixo de rotação que passa pelo centro das faces do cilindro pode ser calculado dividindo-o em muitas cascas cilíndricas de raio r e espessura dr , conforme a Fig. 2.1.

A densidade do cilindro, $\rho = M/V$, é a mesma em todo o volume que é dado por $V = \pi R^2 h$, de forma que $\rho = M/V = M/\pi R^2 h$.

Podemos escrever $\rho = dm/dV$ ou $dm = \rho dV = \rho h(2\pi r)dr$.

Então escrevemos dm em termos de dr na integral da Eq. (2.2) e integramos de $r_0 = 0$ até $r_f = R$.

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 [\rho h(2\pi r)dr] = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \rho h R^4}{2}$$

Então substituímos a expressão para ρ no resultado da integração e finalmente obtemos

$$I = \frac{MR^2}{2}.$$

★ *Observação:* o resultado acima não depende da altura h do cilindro, portanto vale também para um disco homogêneo de massa M e raio R .

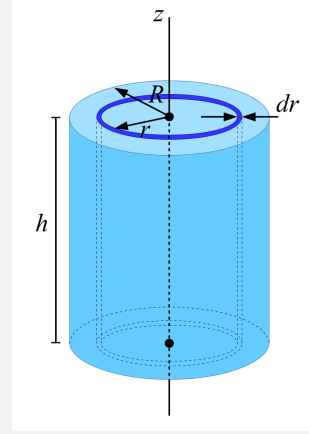


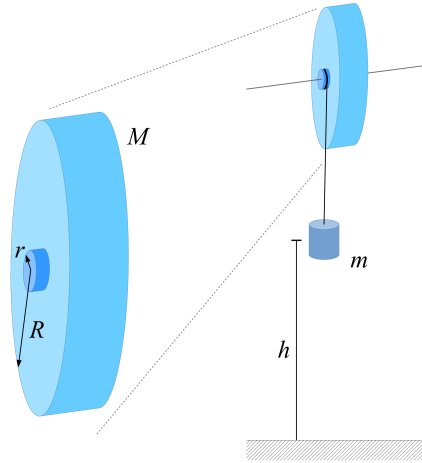
Figura 2.1: Integração ao longo de cascas cilíndricas para cálculo do momento de inércia.

Considere o arranjo experimental esquematizado na Fig. 2.2 no qual um corpo de massa m está preso a um fio de massa desprezível enrolado em um pequeno disco de raio r , que funciona como uma polia, preso a um disco de raio R , massa M , e momento de inércia I_x .

Quando todos os componentes do arranjo estão parados, a energia mecânica do sistema é dada pela energia potencial

$$U = mgh, \quad (2.3)$$

onde g é a aceleração da gravidade local e h é a altura relativa inicial do corpo de massa m .

**Figura 2.2:** Arranjo experimental.

Desprezando-se a dissipação de energia mecânica na forma de calor devido a possíveis forças de atrito existentes no sistema, quando o corpo é solto do repouso, a energia potencial é transformada em energia cinética de rotação do disco e de translação do corpo:

$$U = K_{rot} + K_{trans} \quad (2.4)$$

$$mgh = \frac{1}{2}I_{total}\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.5)$$

onde I_{total} do subsistema (disco grande + disco pequeno + eixo) será aproximado por I_x .

Os valores de v e ω podem ser determinados durante a queda do corpo, através da medida do tempo de queda. Orientando o eixo y positivamente para baixo. A velocidade v do corpo durante a queda a cada instante de tempo t é dada por

$$v = v_0 + at$$

com a sendo a aceleração do movimento de queda e $v_0 = 0$ tal que

$$v = at. \quad (2.6)$$

Combinando a Eq. (2.6) com a equação para o deslocamento vertical y temos que

$$y = y_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} = \frac{vt^2}{2t} = \frac{vt}{2}$$

de forma que

$$v = \frac{2y}{t}. \quad (2.7)$$

Finalmente, a velocidade angular ω pode ser calculada a partir da relação $v = \omega r$.

Exemplo. Considere a máquina de Atwood da Fig. 2.3 formada por dois blocos de massa $m_1 = 120$ g e $m_2 = 180$ g presos por uma corda de massa desprezível que passa por uma polia de raio $R = 5,00$ cm. Quando o sistema é liberado, o bloco de massa m_2 cai $49,0$ cm em $7,00$ s. Considere que a corda não escorrega e despreze o atrito entre a corda e a polia.

a) Qual é a aceleração dos blocos em $t = 7,00$ s?

Tomando a orientação positiva para baixo com origem na posição inicial do bloco de massa m_2 , temos que o deslocamento do bloco de massa m_2 é dado por

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

com $y_0 = v_0 = 0$ e chamando de a a aceleração do bloco. Assim,

$$a = \frac{2y}{t^2} = \frac{2(49,0 \times 10^{-2})}{7,00^2} = 0,02 \text{ m/s}^2$$

para baixo, no sentido positivo de y . A aceleração do bloco de massa m_1 tem mesmo módulo e direção e sentido para cima.

b) Qual é a velocidade dos blocos em $t = 7,00$ s?

Para o bloco de massa m_2 temos que

$$v = v_0 + at = 0 + 0,02 \times 7,00 = 0,14 \text{ m/s}^2.$$

O vetor velocidade do bloco de massa m_2 aponta no para baixo enquanto que a velocidade do bloco de massa m_1 é igual em módulo e direção e tem sentido contrário.

c) Calcule o momento de inércia I da polia em torno do eixo de rotação que passa pelo seu centro.

Usando conservação de energia podemos escrever $U_i = K_f + U_f$, onde i refere-se ao instante no qual o sistema é liberado e f ao instante $t = 7,00$ s.

Definindo a configuração zero para a energia potencial no instante no qual o sistema é liberado, temos que $U_i = 0$.

Por outro lado, temos que

$$U_f = m_1 g y - m_2 g y,$$

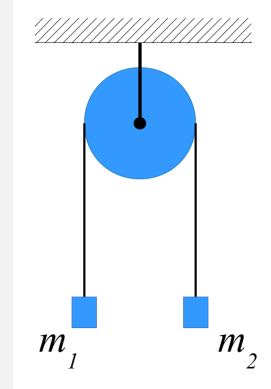


Figura 2.3: Esquema de uma Máquina de Atwood.

Cont.

pois a energia potencial aumenta com a subida do bloco de massa m_1 e diminui com a descida do bloco de massa m_2 . Além disso,

$$K_f = \frac{m_1 v_f^2}{2} + \frac{m_2 v_f^2}{2} + \frac{I \omega_f^2}{2},$$

onde podemos utilizar a relação $v_f = r = R\omega_f$ para escrever a velocidade angular em termos da velocidade linear calculada no item b). Assim,

$$\frac{m_1 v_f^2}{2} + \frac{m_2 v_f^2}{2} + \frac{I \omega_f^2}{2} + m_1 g y - m_2 g y = 0,$$

de forma que

$$I = \frac{2R^2}{v_f^2} \left[m_2 g y - m_1 g y - \frac{m_2 v_f^2}{2} - \frac{m_1 v_f^2}{2} \right]$$

$$I = \frac{2(0,05^2)}{0,14^2} \left[9,8(49,0)(180 - 120)10^{-5} - \frac{0,14}{2}(180 + 120)10^{-3} \right] \approx 0,07 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

2.3 Materiais e métodos

2.3.1 Materiais

- Giroscópio de 3 eixos
- Corda com puxador
- Paquímetro
- Gancho metálico
- Trena
- Cronômetro
- Balança semianalítica
- Retângulos de espuma
- 2 discos de metal acopláveis ao gancho ($\pm 50 \text{ g}$ cada)

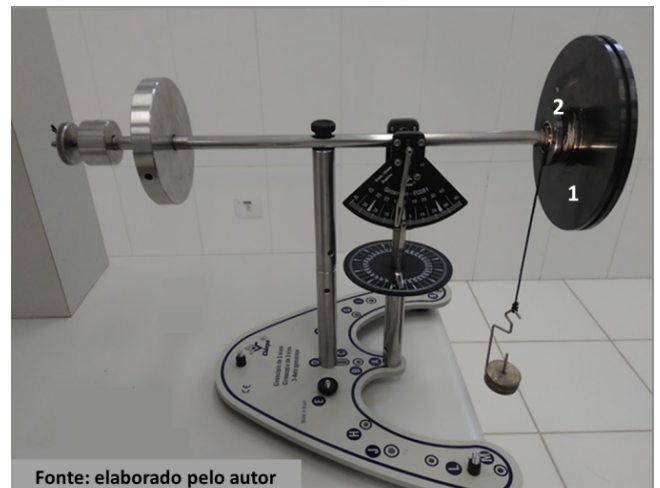


Figura 2.4: Visão esquemática da montagem do experimento.

2.3.2 Procedimento experimental

- a) Utilizando um paquímetro, meça os diâmetros do volante e da polia auxiliar menor do giroscópio, os quais estão identificados na Figura 2.4 pelos números 1 e 2 respectivamente;
- b) Pese o conjunto (corda + gancho + massas) e anote também a massa do volante que se encontra registrada na parte interna do mesmo (pesado previamente antes da montagem do arranjo experimental);
- c) Adote uma altura que será a posição do corpo a ser solto (para facilitar, adote a altura da bancada como referência);
- d) Posicione os retângulos de espuma de forma a amortecerem o choque das massas com o chão;
- e) Enrole firmemente a corda com puxador ao redor da polia auxiliar menor, encaixe o gancho com as massas na extremidade do fio;
- f) Ajuste a altura conforme estabelecido no item “c” (utilize a caixa do paquímetro como referência para manter sempre a mesma altura). Em seguida, libere o corpo e meça o tempo de queda;
- g) Repita os procedimentos descritos em “e” e “f” 5 vezes.

2.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Faça uma comparação do valor do momento de inércia obtido experimentalmente I_x através da Eq. (2.5) com aquele obtido teoricamente ($I_{disco} = MR^2/2$);
- Calcule I_x médio (a partir das cinco repetições) e verifique se houve conservação de energia mecânica. Em caso negativo, calcule o erro percentual relativo à energia potencial inicial.
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 1: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 1: mecânica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

HIGDON, A.; STILES, W.B.; DAVIS, A.W. et al.; Mecânica, volume 1: estática. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1984.

Experimento 3

Cinética e dinâmica de rotação de um corpo rígido

3.1 Objetivo

Determinar a velocidade angular e a aceleração angular de um cilindro rolando em um plano inclinado a partir de considerações de conservação de energia.

3.2 Conceitos

O movimento que um corpo rígido descreve ao rolar ao longo de uma superfície plana, como ilustrado na Fig. 3.1, é chamado de **rolamento**. Este movimento pode ser visto como uma rotação pura em torno de um eixo que sempre passa pelo ponto de contato P do corpo com a superfície.

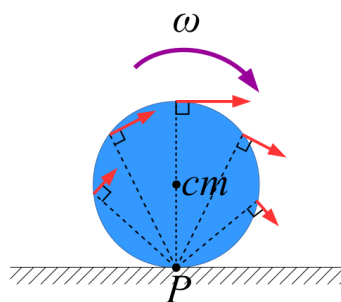


Figura 3.1: Esquema de corpo em rolamento.

A energia cinética total é dada por

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (3.1)$$

20 EXPERIMENTO 3. CINÉTICA E DINÂMICA DE ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

onde ω é a velocidade angular e I_P é o momento de inércia em relação ao ponto P . Pelo teorema dos eixos paralelos ou teorema de Steiner, I_P é igual a

$$I_P = I_{cm} + mR^2, \quad (3.2)$$

onde I_{cm} o momento de inércia em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, m é a massa do corpo e R é a distância entre o ponto P e o centro de massa.

Alternativamente, o rolamento pode ser considerado uma combinação de uma rotação pura com uma translação pura de forma que a energia cinética do corpo pode ser expressa como a soma da energia cinética de translação do centro de massa com a energia cinética de rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa.

Em particular, considere o movimento de um cilindro uniforme de massa m rolando em um plano inclinado. A Fig. 3.2 mostra uma vista lateral da configuração de interesse.

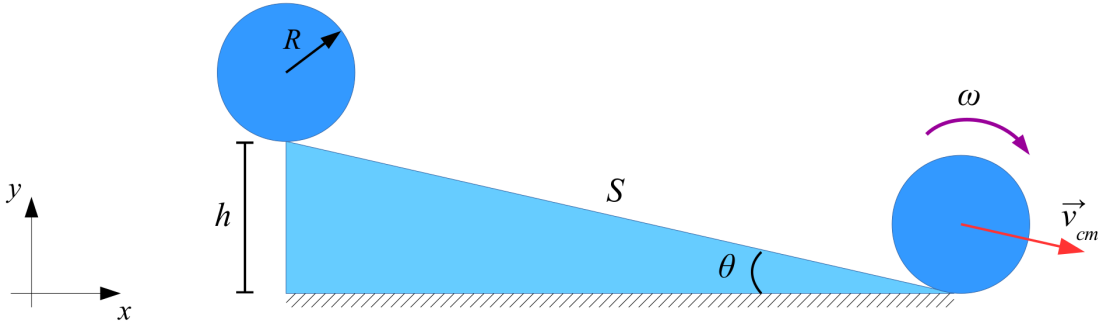


Figura 3.2: Vista lateral de um cilindro rolando em um plano inclinado.

O momento de inércia do cilindro em torno de um eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular às suas faces é

$$I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2. \quad (3.3)$$

Assim, a energia cinética do cilindro rolando pelo plano inclinado a cada instante de tempo é dada por

$$K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2, \quad (3.4)$$

onde o primeiro termo representa a energia cinética de translação do centro de massa e o segundo termo a energia cinética de rotação com relação a um eixo que passa pelo centro das faces do cilindro. Quando o corpo rola sem deslizar ou quicar na superfície $v_{cm} = \omega R$, portanto, a Eq. (3.4) pode ser escrita em função apenas de v_{cm} ou de ω . Definindo a configuração zero para a energia potencial na base do plano inclinado, a energia potencial do cilindro em qualquer ponto é dada por

$$U = mgy. \quad (3.5)$$

Em particular, no ponto mais alto da rampa o cilindro terá uma energia potencial igual $U_{max} = mhg$ e sua energia cinética é nula.

Assim, conhecendo I podemos e desprezando quaisquer forças não conservativas, podemos utilizar o princípio da conservação da energia mecânica para determinar a velocidade do cilindro em qualquer ponto do plano inclinado através da equação

$$2mgh = v_{cm}^2 \left[m + \frac{I_{cm}}{R^2} \right]. \quad (3.6)$$

3.3 Materiais e métodos

3.3.1 Materiais

- Plano inclinado graduado (banco óptico)
- Cilindro metálico (cobre)
- Paquímetro
- Multicronômetro com disparador
- Balança semianalítica
- Régua de plástico

3.3.2 Procedimento experimental

- a) Meça a massa e o diâmetro do cilindro. Calcule a altura h do sistema ($h = h_{max} - h_{min}$, onde h_{max} e h_{min} são, respectivamente, as alturas do ponto mais alto e do ponto mais baixo da rampa com relação à bancada do laboratório). O cilindro é solto do ponto mais alto do sistema (h_{max}), enquanto que h_{min} é a altura que coincide com a marcação de 900 mm do banco óptico;
- b) Com o auxílio de uma régua, posicione o cilindro na altura máxima (início da rampa, marcado por 0 mm). Configure o multicronômetro na função F10;
- c) Libere o cilindro e colete o tempo de rolamento até 100 mm;
- d) Repita 5 (cinco) vezes e encontre o valor médio de t , t_{med} ;
- e) Refaça os passos dos itens “b”, “c” e “d” para rolamentos de 0 a 200 mm, 0 a 300 mm e assim sucessivamente até a distancia final 0 a 900 mm;

3.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Faça o gráfico de $S \times t$ e a partir deste encontre a expressão (equação) para a velocidade linear do cilindro ajustando um polinômio de 2º grau;
- Utilizando conservação de energia, determine o momento de inércia do cilindro com relação ao eixo de rotação que passa pelo centro das faces e compare com o valor obtido através da Eq. (3.3);
- Utilizando o momento de inércia calculado com a Eq. (3.3) e a velocidade obtida através do ajuste polinomial, verifique se há conservação de energia quando o cilindro rola do ponto inicial (0 mm) até o ponto final (900 mm) da rampa;
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 1: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 1: mecânica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

SCHAUM, D.; VAN DER MERWE, C.W.; Física Geral. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

Experimento 4

Momento Angular

4.1 Objetivo

Estudar os possíveis movimentos num giroscópio e determinar o momento de inércia do volante de um giroscópio de três eixos.

4.2 Conceitos

Um **giroscópio** é um dispositivo usado para medir ou manter orientação e velocidade angular composto por um corpo rígido chamado volante que pode girar em torno de um eixo móvel num referencial inercial.

Giroscópios são muito úteis para estudar qualitativamente a mecânica rotacional de corpos rígidos. Por exemplo, giroscópios de três eixos, são utilizados para demonstrar fenômenos físicos como estabilidade direcional (conservação do momento angular), precessão (movimento devido à aplicação de um torque externo) e nutação (efeito da velocidade). Além disso, giroscópios têm diversas aplicações tecnológicas que vão desde seu uso em sistemas de navegação inercial e no controle de atitude de veículos espaciais, até aplicações em cinematografia, como no funcionamento das Steadicams, e em sistemas de realidade aumentada, incluindo jogos como Pokémon Go.

O funcionamento de um giroscópio básico, como os mostrados na Figura 4.1(a) e (b), está fundamentado no princípio da conservação do momento angular. Existem outros tipos de giroscópio como os mostrados na Figura 4.1(c), utilizados em celulares e GPS, por exemplo, compostos por dispositivos mecânicos, eletrônicos, atuadores e sensores, que são encapsulados em formato de circuitos integrados e usam uma tecnologia chamada de MEMS (sigla de *microelectromechanical systems*).

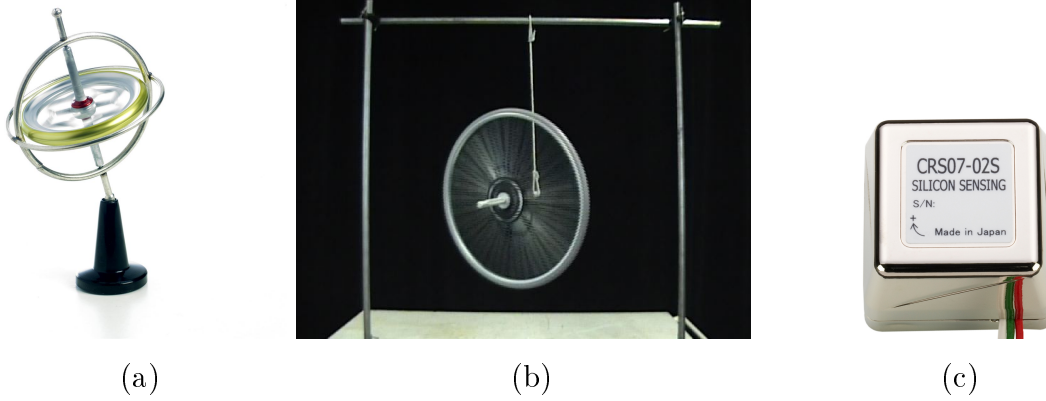


Figura 4.1: (a) Giroscópio gimbal didático. (FONTE: www.gyroscope.com) (b) Giroscópio rudimentar feito com roda de bicicleta. (FONTE: MIT Physics Demo - Bicycle Wheel Gyroscope) (c) Exemplo de giroscópio MEMS. (FONTE: www.siliconsensing.com)

Considere o giroscópio rudimentar esquematizado na Figura 4.2(a) composto por uma roda giratória cujo eixo de rotação (considerado de massa desprezível) é livre para assumir qualquer orientação sobre o suporte central. Se a roda está parada, isto é, se o giroscópio (sistema roda + eixo de rotação apoiado no suporte) está estacionário, o giroscópio cai (girando ao longo do plano yz) sob o efeito da força gravitacional $M\vec{g}$ que age para baixo no centro de massa da roda.

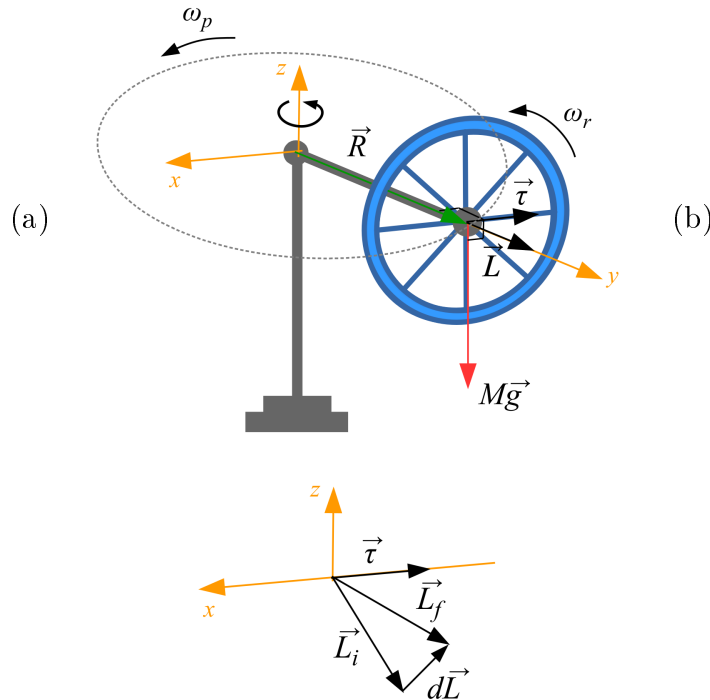


Figura 4.2: (a) Esquema de um giroscópio rudimentar. (b) Variação na direção do momento angular do giroscópio.

A força gravitacional produz um torque $\vec{\tau} = \vec{R} \times M\vec{g}$ ao longo do plano xy com módulo $\tau = MgR \sin(90^\circ)$. Pela segunda Lei de Newton para rotações temos que

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (4.1)$$

onde $\vec{L}$ é o momento angular do giroscópio, de forma que num intervalo de tempo infinitesimal dt o torque causa uma variação infinitesimal $d\vec{L}$ no momento angular $\vec{L}$. Essa variação é perpendicular a $\vec{L}$ e tem a mesma direção que $\vec{\tau}$, fazendo que o módulo de $\vec{L}$ permaneça constante ($|\vec{L}_i| = |\vec{L}_f|$) enquanto que sua direção varia na mesma direção da variação causada pelo torque, conforme o diagrama da Figura 4.2(b).

Quando a roda gira rapidamente, a queda é substituída por um movimento no plano xy chamado de **precessão**.

Considere que a roda gira com velocidade angular ω_r e que quando o movimento de precessão começa, o eixo do giroscópio está na horizontal (perpendicular ao suporte central.) Considere também que $\omega_r \gg \omega_p$, onde ω_p é a velocidade de precessão, de forma que o momento angular devido à precessão é desprezível em relação ao momento angular $\vec{L}$ do giroscópio que tem módulo $L = I\omega_r$.

O diagrama da Figura 4.2(b) permite calcular a **taxa de precessão** ω_p através do ângulo entre os vetores $\vec{L}_i$ e $\vec{L}_f$, pois

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\tau}{L} = \frac{(MgR)dt}{L}, \quad (4.2)$$

então

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{MgR}{I\omega_r}. \quad (4.3)$$

Finalmente, considere um giroscópio, esquematizado na Figura 4.3, formado por um volante de massa M que gira em torno de um eixo de rotação apoiado em um suporte vertical com um contrapeso preso ao eixo na extremidade oposta ao volante.

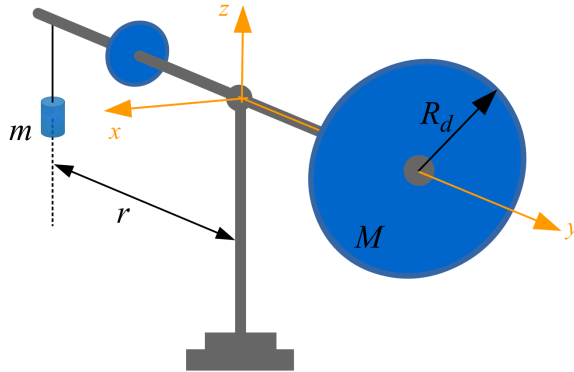


Figura 4.3: Esquema do aparato experimental.

Considere que o giroscópio está inicialmente em equilíbrio na horizontal sem o contrapeso adicional de massa m mostrado na Figura 4.3. Quando o volante gira com ω_r em torno do eixo y , o sistema se mantém na horizontal e na posição inicial. No entanto, se um torque for aplicado ao eixo do giroscópio por causa da força gravitacional mg devida à colocação de um contrapeso adicional (como ilustrado na Figura 4.3), ocorre um movimento de precessão que no plano xy com velocidade ω_p . Nesse caso, teremos

$$\omega_p = \frac{mgr}{I\omega_r}, \quad (4.4)$$

onde mgr é o torque gerado pela força gravitacional agindo sobre o contrapeso e I é o momento de inércia do volante. Assim, podemos utilizar a montagem experimental esquematizada na Figura 4.3 para calcular momento de inércia do disco de massa M através da expressão

$$I = \frac{mgr}{\omega_r\omega_p} \quad (4.5)$$

uma vez que ω_p e ω_r podem ser determinadas experimentalmente.

Relembrando. O momento de inércia de um disco em torno de um eixo de rotação perpendicular a suas faces passando pelo centro de massa é

$$I_{CM} = MR_d^2, \quad (4.6)$$

onde M é a massa do disco e R_d o seu raio.

Pequenos desalinhamentos entre o vetor momento angular e eixo de simetria do volante causam um movimento chamado de **nutação**.

Quando o volante é colocado em rotação e o eixo de rotação é deixado livre para precessionar, a precessão regular (descrita pelas equações discutidas anteriormente) se iniciaria imediatamente se o eixo de rotação fosse colocado em movimento com velocidade angular ω_p . No entanto, uma vez que o eixo está inicialmente em repouso, a velocidade angular de precessão ω_p é inicialmente nula. Assim, o torque gerado pela força gravitacional causa a queda do sistema eixo + volante, fazendo com que a extremidade do eixo de rotação desça abaixo da sua posição inicial horizontal. Esta configuração faz com que o sistema adquira uma componente não-nula de momento angular vertical para baixo que é compensada por uma componente não nula para cima para satisfazer o princípio da conservação do momento na direção z , uma vez que não há forças exercendo torques ao longo do eixo z . Isto gera o movimento de precessão + nutação tipicamente observado em giroscópios.

A nutação de um giroscópio que gira rapidamente é vista como pequenas vibrações e tremores do eixo de rotação que está precessionando. Quanto mais rápida a rotação do volante, menos será notado o efeito de nutação uma vez que a vibração será muito rápida e de pequena amplitude. Além disso, na prática, o atrito no suporte do eixo amortece

- c) Com o volante em movimento pressione suavemente o ponto A para baixo e observe o efeito da aplicação desta força externa na movimentação do giroscópio. Reequilibre o sistema e pressione o ponto A novamente, desta vez para cima, e observe novamente o efeito causado na movimentação do giroscópio;
- d) Retorne o sistema a condição de equilíbrio e pressione novamente o ponto A desta vez na direção horizontal, nos sentidos para a esquerda e depois para a direita, observando em cada caso os efeitos da aplicação das forças na movimentação do giroscópio.
- e) Aguarde a diminuição da velocidade de giro do volante e pare-o completamente;
- f) Enrole novamente a corda com puxador ao redor do disco menor, fazendo o volante girar no sentido oposto ao que foi determinado no item “b” e reaplique as forças externas de acordo com o que foi pedido nos itens “c” e “d”. Observe os efeitos na movimentação do giroscópio;
- g) Esquematize em seu caderno os vetores momento angular ($\vec{L}$), velocidade angular ($\vec{\omega}$), torque ($\vec{\tau}$) e velocidade angular de precessão ($\vec{\omega}_p$) para o disco movimentando-se no sentido horário e anti-horário, com aplicação de um torque externo em A para baixo e para cima, se julgar necessário refaça os itens “b”, “c” e “f”.

PARTE II - Cálculo do Momento de Inércia

Antes de começar, observe na Fig. 4.4 a localização das partes (1 - 5 e A), o posicionamento correto do giroscópio e do sensor.

- a) Coloque o sistema em equilíbrio e levante a “antena” (4) que está presa ao volante por uma fita;
- b) Prepare o multicronômetro na função F6, e prepare o cronômetro manual para medir o tempo de rotação de 180° ;
- c) Segure firmemente o eixo na horizontal, encaixe o gancho com a massa no anel do ponto A, enrole a corda com puxador ao redor da polia auxiliar menor (2) e puxe, movimentando assim o volante (1);
- d) Com o volante em movimento e ainda segurando o eixo, posicione o sensor óptico, posicione também o ponteiro vazado (5) no 0° do goniômetro horizontal com escala de 0° até 360° ;
- e) Observe no multicronômetro se foi feita a leitura do tempo de rotação t_r ;

- f) Remova o sensor óptico e solte o eixo ao mesmo tempo em que o cronômetro manual é disparado, deixando o giroscópio se mover livremente, pare o cronômetro no momento em que o ponteiro vazado cruzar com o 180° no goniômetro, coletando então t_p ;
- g) Anote os valores medidos do tempo de rotação e do tempo de precessão e repita o procedimento até obter cinco valores para cada um dos tempos;

4.4 Para o relatório

- Mostre e discuta todos os casos esquematizados no item “g” da *PARTE 1* do procedimento da Seção 4.3.2.
- Usando os dados colhidos na *PARTE 2* do procedimento da Seção 4.3.2, calcule o valor experimental do momento de inércia do volante utilizando a Eq. (4.5) com $\omega_r = 2\pi/t_r$ e $\omega_p = \pi/t_p$. Adote $g = 9,81\text{m/s}^2$
- Compare o valor obtido experimentalmente no item anterior com o valor obtido através da Eq. (4.6).
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.
- Liste três aplicações práticas dos conceitos envolvidos neste experimento com as explicações necessárias.

Referências

- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 1: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 1: mecânica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- NUSSENZVEIG, M.; Curso de Física Básica, volume 1. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.
- BUTIKOV, E.; Precession and nutation of a gyroscope. European Journal of Physics, Volume 27, Número 5, 2006.

Experimento 5

Pêndulo simples

5.1 Objetivo

Determinar o valor da aceleração gravitacional usando um pêndulo simples.

5.2 Conceitos

O **pêndulo simples** é um sistema mecânico que exibe movimento oscilatório periódico. Ele é formado por um peso que pode ser considerado uma partícula de massa m suspenso por um fio inextensível de massa desprezível e comprimento L , preso a um ponto fixo conforme o esquema mostrado na Fig. 5.1.

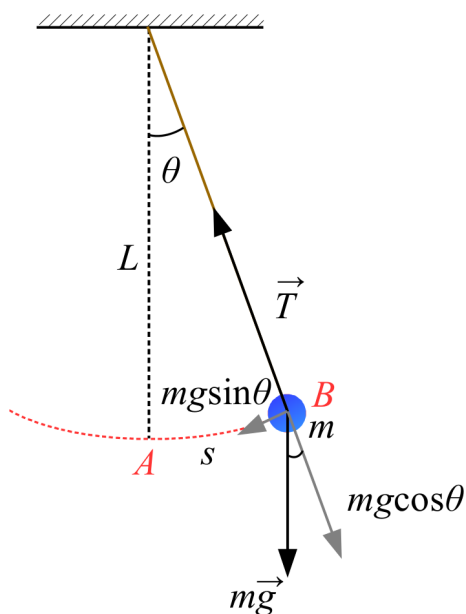


Figura 5.1: Um pêndulo simples com as forças que agem sobre ele.

Ao ser levada de uma posição de mínima energia potencial (ponto A) para uma posição de energia potencial mais alta (ponto B) e ser abandonada, a partícula descreverá um

movimento oscilatório em um plano vertical (plano do papel) em torno de uma reta vertical que liga o ponto de suspensão fixo ao ponto A.

As forças que atuam sobre o peso são a tração $\vec{T}$ exercida pelo fio e a força gravitacional $m\vec{g}$, onde $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade. Desprezando a resistência do ar, podemos escrever a Segunda Lei de Newton $F_{res} = ma_{res}$ para o movimento do pêndulo:

$$-mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (5.1)$$

onde $s = L\theta$ é o deslocamento angular do peso e o sinal negativo indica que a componente tangencial da gravitacional aponta na direção do ponto de equilíbrio $\theta = 0$. Assim,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta. \quad (5.2)$$

Quando o ângulo θ é pequeno ($\theta \lesssim 10^\circ$), temos que $\sin \theta \approx \theta$, de forma que podemos reescrever a Eq. (5.2) como

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \quad (5.3)$$

que tem a mesma forma matemática que a equação de movimento de um oscilador harmônico simples no qual a componente tangencial da força gravitacional age como a força restauradora.

A solução da Eq. (5.3) é $\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi)$, onde θ_{max} é a posição angular no ponto B e a frequência angular é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (5.4)$$

Substituindo $\omega = 2\pi/T$, onde T é o período do pêndulo, obtemos que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (5.5)$$

onde vemos que o período e a frequência de um pêndulo simples dependem apenas do comprimento do fio e da aceleração da gravidade local, assim, todos os pêndulos simples de mesmo comprimento sob ação da mesma aceleração da gravidade, oscilam com o mesmo período.

O pêndulo simples é um equipamento conveniente para fazer medições do valor da aceleração da gravidade local uma vez que o comprimento do fio e o período de oscilação podem ser medidos facilmente. Para cada par de valores (L, T) , o valor de g é calculado através da expressão

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}. \quad (5.6)$$

Suponha que sejam efetuadas N medidas do par de valores (L, T) utilizando um pê-

dulo simples no qual o comprimento do fio pode ser variado, podemos calcular o valor de g ajustando uma reta aos dados uma vez que $T^2 \propto L$ com constante de proporcionalidade $4\pi^2/g$. Utilizando o método dos mínimos quadrados encontramos que o coeficiente da reta é dado por:

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{N(\sum L_i T_i^2) - (\sum L_i)(\sum T_i^2)}{N(\sum L_i^2) - (\sum L_i)^2}. \quad (5.7)$$

5.3 Materiais e métodos

5.3.1 Materiais

- Suporte universal
- Conjunto Arete
- Massa pendular
- Cronômetro manual
- Trena

5.3.2 Procedimento experimental

- a) Preencha as colunas $L(\text{m})$, $T_1(\text{s})$ e $T_2(\text{s})$ da Tabela 5.1, para isto:
- b) Realize duas cronometragens de tempo (T_1 e T_2) correspondente a dez oscilações para cada um dos seguintes comprimentos do pêndulo: 0,25; 0,30; 0,35; 0,40; 0,45; 0,50; 0,55; 0,60; 0,65; 0,70m;
- c) Utilizando a expressão $T(\text{s}) = (T_1 + T_2)/(2 \times 10)$, calcule o tempo referente à apenas uma oscilação e preencha a coluna $T(\text{s})$ na Tabela 5.1;
- d) Realize os cálculos necessários para terminar de preencher a Tabela 5.1. Os valores dos somatórios serão utilizados na Seção 5.4;

5.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Calcule o valor de g usando o método dos mínimos quadrados, conforme a Eq. (5.7), com $N = 10$;
- Compare o valor de g obtido no anterior com $9,81 \text{ m/s}^2$.
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.

Medida	$L(m)$	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T(s)$	$T^2(s^2)$	$L^2(m^2)$	$LT^2(ms^2)$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
Somatórios		-----	-----	-----			

Tabela 5.1: Medidas do período de oscilações (T) em função do comprimento (L) do pêndulo.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 2: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 2: mecânica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

SCHAUM, D.; VAN DER MERWE, C.W.; Física Geral. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1973.

Experimento 6

Pêndulo físico

6.1 Objetivo

Determinar experimentalmente o momento de inércia de uma barra utilizando conceitos relacionadas ao pêndulo físico.

6.2 Conceitos

Qualquer corpo rígido que oscile livremente em torno de um eixo de rotação fixo perpendicular ao plano do movimento e que não passa pelo centro de massa do corpo é chamado **pêndulo físico** ou **pêndulo composto**. Ao contrário de um pêndulo simples, um pêndulo físico pode ter uma distribuição de massa uniforme.

Considere o pêndulo físico esquematizado na Fig. 6.1. A força gravitacional exerce um torque de módulo $mgh \sin \theta$ relativo ao pivô O , onde g é o módulo da aceleração da gravidade e h é a distância do pivô ao centro de massa do corpo rígido.

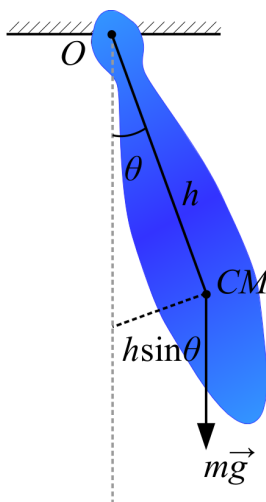


Figura 6.1: Um pêndulo físico.

Desprezando a resistência do ar e qualquer atrito entre o corpo rígido e o pivô, podemos escrever a forma rotacional da Segunda Lei de Newton $\tau_{res} = I\alpha_{res}$, onde I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo perpendicular ao plano movimento que passa por O e α é a aceleração angular. Assim, temos que

$$-mgh \sin \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (6.1)$$

onde o sinal negativo indica que o torque em relação a O tende a diminuir $\theta = 0$. Supondo que o ângulo θ é pequeno ($\theta \lesssim 10^\circ$), temos que $\sin \theta \approx \theta$, de forma que podemos reescrever a Eq. (6.1) como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \left(\frac{mgh}{I} \right) \theta \quad (6.2)$$

que tem a mesma forma matemática que a equação de movimento de um oscilador harmônico simples.

A solução da Eq. (6.2) é $\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi)$, onde θ_{max} é a posição angular máxima e a frequência angular é

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}. \quad (6.3)$$

Substituindo $\omega = 2\pi/T$, onde T é o período do pêndulo, obtemos que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}. \quad (6.4)$$

Se considerarmos uma partícula girando em torno de O com momento de inércia $I = mh^2$, a Eq. (6.4) se reduz à $T = 2\pi\sqrt{h/g}$ que é a equação de período para um pêndulo simples.

Se os valores de h e T são conhecidos, esse resultado pode ser usado para medir o momento de inércia de um corpo rígido plano (ou com espessura desprezível).

Relembrando. Pelo Teorema dos Eixos paralelos, o momento de inércia de barra rígida homogênea de comprimento L oscilando em torno de um pivô O , conforme a Fig. 6.2, é dado por

$$I = I_{CM} + mh^2, \quad (6.5)$$

com

$$I_{CM} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mL^2. \quad (6.6)$$

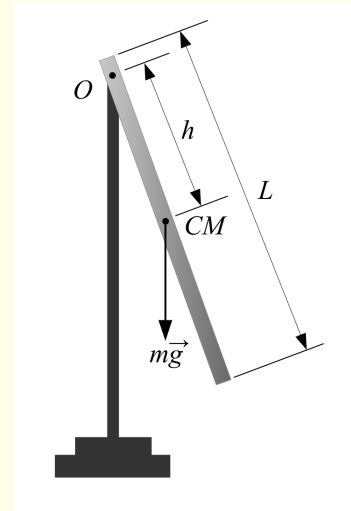


Figura 6.2: Barra rígida oscilando.

6.3 Materiais e métodos

6.3.1 Materiais

- Suporte universal
- Braço horizontal
- Barra de metal (± 30 cm)
- Barra de metal (± 50 cm)
- Paquímetro
- Trena e régua
- Cronômetro manual
- Balança semianalítica
- Parafuso para fixação da barra

6.3.2 Procedimento experimental

- a) Meça a massa (m), o diâmetro (d) e o comprimento (L) de cada uma das barras;
- b) Realize duas contagens de tempo (T) correspondentes a dez oscilações para cada uma das barras;
- c) Determine a distância (h) entre o eixo de rotação e o centro de massa de cada uma das barras;

6.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Com as medidas de T , m e h , determine o momento de inércia I_b de cada barra através da Eq. (6.4). Adote $g = 9,81\text{m/s}^2$.
- Calcule o momento de inércia para cada uma das barras utilizando Eq. (6.5). Supondo que este seja o valor teórico, determine o erro percentual relativo ao valor obtido experimentalmente no item anterior.
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 2: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 2: mecânica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Experimento 7

Sistema massa-mola e oscilador harmônico amortecido e forçado

7.1 Objetivo

Determinar a frequência de oscilação de um oscilador harmônico através de vários experimentos que utilizam o sistema massa-mola. Determinar experimentalmente a frequência de ressonância de um sistema massa mola amortecedor forçado.

7.2 Conceitos

O oscilador harmônico é um dos poucos sistemas físicos que tem solução exata. É um modelo muito útil para explicar desde fenômenos simples como o movimento de um pêndulo, até fenômenos mais complexos como vibrações moleculares. O movimento harmônico simples (MHS) é o movimento executado por uma partícula sujeita a uma força de módulo proporcional ao seu deslocamento e orientada no sentido oposto.

O **sistema massa-mola** é um modelo para o MHS. A Fig. 7.1(a) mostra a mola livre com comprimento L_0 , enquanto que a Fig. 7.1(b) mostra a mola na posição de equilíbrio, após a adição do elemento de inércia do sistema, isto é, um corpo de massa M . Nessa configuração, o comprimento da mola é L . A Fig. 7.1(c) ilustra a posição inicial do sistema massa-mola para uma oscilação de amplitude x_{max} em torno da posição de equilíbrio.

A força restauradora que atua sobre uma massa M presa a uma mola de constante elástica K é

$$F = -Kx, \quad (7.1)$$

onde x é o alongamento da mola. A expressão acima é conhecida como Lei de Hooke.

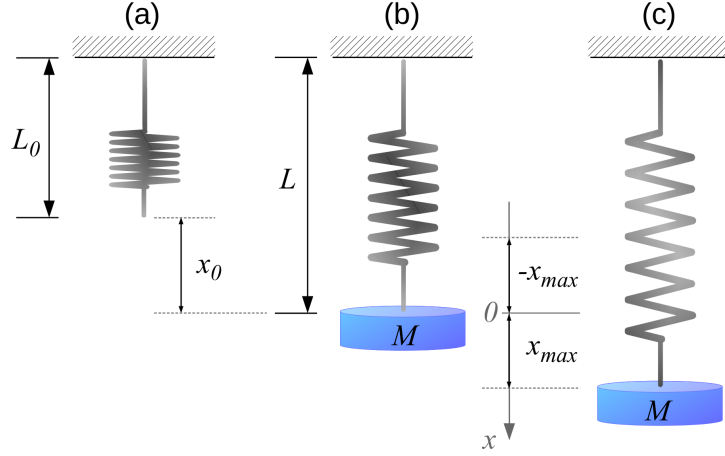


Figura 7.1: Sistema massa-mola. (a) Mola livre. (b) Sistema massa-mola na posição de equilíbrio. (c) Posição inicial para oscilação da massa em torno da posição de equilíbrio com amplitude x_{max} .

Pela segunda Lei de Newton temos que

$$F = Ma = -Kx. \quad (7.2)$$

Uma vez que $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, temos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Kx}{M} = 0. \quad (7.3)$$

Uma solução para essa equação diferencial de segunda ordem é a função cosseno a seguir:

$$x(t) = x_{max} \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (7.4)$$

onde x_{max} é a amplitude do movimento, ϕ é a constante de fase e ω_0 é a frequência angular. Substituindo $x(t)$ e sua segunda derivada na Eq. (7.3) temos

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (7.5)$$

que se relaciona com o período de oscilação através da equação

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (7.6)$$

Relembrando. O inverso do período é a frequência f do movimento que mede o número de oscilações por unidade de tempo. Quando T é medido em segundos, f será medida em Hertz ($1\text{Hz} = \text{s}^{-1}$).

A maioria das oscilações não são livres como descrito até este ponto. Em muitos sistemas reais forças não conservativas como o atrito ou a resistência do ar se opõem ao movimento do oscilador. Consequentemente, a energia mecânica do sistema diminui com o tempo e o movimento é chamado de *amortecido*. Isso se traduz na diminuição da amplitude ao longo do tempo. Em geral, consideramos efeitos de amortecimento lineares, com a força resistiva da forma

$$\vec{F}_r = -b \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (7.7)$$

onde b é o coeficiente de amortecimento.

Uma forma de contrabalancear a perda de energia devido ao amortecimento, é aplicar uma força externa periódica na direção do movimento do oscilador que realize trabalho positivo sobre o sistema. Nesse caso, o movimento é dito *forçado* e a força externa é chamada de *forçante*.

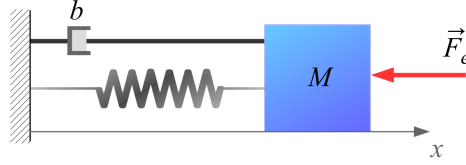


Figura 7.2: Sistema massa-mola. (a) Oscilador forçado amortecido.

Considere o oscilador amortecido da Fig. 7.2. Se o módulo do forçante é dado por $F_e = F_0 \cos(\omega t)$, onde ω é a frequência externa, e o módulo do amortecimento é dado por $-b dx/dt$, usando a segunda lei de Newton podemos escrever a equação de movimento do sistema como:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (7.8)$$

que tem solução da forma

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (7.9)$$

com

$$A = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \left(\frac{b\omega}{M}\right)^2}}. \quad (7.10)$$

Na condição de ressonância, $\omega = \omega_0$ ocorre um máximo na amplitude, que tende ao infinito conforme b tende a zero.

7.3 Materiais e métodos

7.3.1 Materiais

- Suporte universal
- Braço horizontal;
- Régua milimetrada com encaixe;
- Suporte para mola;
- Parafuso para fixação do suporte;
- Mola helicoidal;
- Gancho metálico;
- Sensor fotoelétrico;
- Multicronômetro;
- Balança semianalítica;
- Marcador para retroprojektor;
- Carros 1 e 2;
- Gerador de sinais digital;
- Cabo BNC-jacaré;
- Trilho de ar;
- Mangueira acopladora;
- Gerador de fluxo de ar;
- Imã;
- 5 discos de metal acopláveis ao gancho.

7.3.2 Procedimento experimental

- a) Identifique e pese cada uma das massinhas m_1 , m_2 , m_3 , m_4 e m_5 . Pese também o gancho e o carrinho 1 do trilho de ar;
- b) Utilizando a régua como escala, determine a elongação da mola para cada situação: $x_1 = x(m_1)$, $x_2 = x(m_1 + m_2)$, $x_3 = x(m_1 + m_2 + m_3)$, e assim sucessivamente até a colocação das cinco massas;
- c) Encontre um valor da constante da mola ($Kx = mg$) para cada massa situação, e por fim encontre o K_{medio} que será utilizado nos cálculos.

SISTEMA VERTICAL - SENSOR

- d) Escolha com quantas massas irá trabalhar (2, 3 ou 4). Acople as massas ao gancho e conecte o gancho à mola. Posicione o sensor no limite inferior do gancho;
- e) Coloque a mola para oscilar e, utilizando o multicronômetro na função F3, anote o período T_{10} referente à 10 oscilações (t10);

SISTEMA HORIZONTAL - TRILHO DE AR

- f) Determine a frequência de oscilação teórica do sistema (ω_0) através da Eq. (7.5) utilizando a massa do carrinho 1 e o K_{mdio} calculado no item “c”;
- g) Prenda a mola, unindo os dois carrinhos. CUIDADO! **NÃO** DESLIZE O CARRINHO NO TRILHO DE AR COM O FLUXO DE AR DESLIGADO;
- h) Conecte o gerador de onda à bobina do trilho de ar, selecione um sinal senoidal, com uma amplitude de 10 Vpp. Faça uma varredura lenta de frequências iniciando 2 Hz acima de ω_0 e terminando 2 Hz abaixo de ω_0 ;
- i) Observe o que acontece com a amplitude do movimento oscilatório do carrinho e estime a frequência onde a amplitude do movimento é máxima.

7.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.

Para o sistema vertical

- Calcule a frequência de oscilação ($f = 1/T$), lembrando que $T = T_{10}/10$.
- Compare a frequência experimental encontrada com o valor teórico obtido através da Eq. (7.5).

Para o sistema horizontal

- Explique o observado com relação à amplitude do movimento oscilatório do carrinho. Qual o valor da frequência onde a amplitude do movimento é máxima? Que nome se dá a esta frequência?

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 2: oscilações, ondas e termodinâmica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Experimento 8

Densidade de Líquidos

8.1 Objetivo

Determinar a densidade de líquidos através da lei de Stevin.

8.2 Conceitos

Líquidos e gases são fluidos. Isto é, a nível molecular não formam redes cristalinas e a nível macroscópico podem escoar, amoldando-se à forma do recipiente em que são colocados.

A **massa específica** ou **densidade** de um fluido é definida como a massa de fluido contida em um elemento de volume, ou seja, $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$. Se o volume é muito maior do que um átomo e a massa específica de fluido é a mesma em todos os elemento de volume do corpo considerado, podemos escrever

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (8.1)$$

de forma que a massa específica tem unidade de quilograma por metro cúbico (kg/m^3) no Sistema Internacional de Unidades e é uma grandeza escalar.

A densidade de uma substância varia ligeiramente com a temperatura e a pressão, uma vez que o volume depende dessas grandezas físicas.

Todos os fluidos são em algum grau compressíveis, alguns mais que outros. A compressão de um fluido corresponde à alteração no seu volume quando se submetido a uma pressão exterior. No entanto, qualquer fluido cuja densidade sempre permanece praticamente constante no tempo ao longo do volume opondo-se à compressão é chamado de *incompressível*. Geralmente, líquidos são incompressíveis. a densidade da água a 20°C e 1 atm (pressão média aproximada da atmosfera ao nível do mar) é de $0,998 \times 10^3 \text{kg}/\text{m}^3$, enquanto que mantendo a temperatura constante e aumentando a pressão para 50 atm, a sua densidade é de $1 \times 10^3 \text{kg}/\text{m}^3$. Isto é, uma pressão 50 vezes maior corresponde a uma variação de 0.2% na densidade da água. Assim, é uma boa aproximação tratar um

líquido como um fluido incompressível ao estudar estática dos fluidos. Por outro lado, fluidos cuja massa específica varia com a pressão, como no caso dos gases, são chamados de *compressíveis*.

A força exercida por um fluido estático sobre um corpo submerso nele é sempre perpendicular às suas superfícies. Se considerarmos uma força F uniforme aplicada perpendicularmente a uma superfície plana de área A , podemos definir a **pressão** como

$$P = \frac{F}{A}, \quad (8.2)$$

que tem unidade de Newton por metro quadrado no Sistema Internacional de Unidades, chamada de Pascal (Pa)¹.

Sabemos que um mergulhador é submetido a pressões cada vez maiores a medida que alcança maiores profundidades. Por outro lado, um alpinista sente pressões cada vez menores a medida que atinge altitudes cada vez maiores. Nos dois casos há fluidos envolvidos. No caso do mergulhador, quanto maior a profundidade, maior é a coluna de água sobre ele. O contrário ocorre para o alpinista, a coluna de ar acima dele é cada vez menor a medida que ele sobe.

É possível encontrar uma expressão para a variação da pressão com a profundidade. Para isto, considere um bloco imaginário com seção transversal horizontal de área A e altura h submerso num líquido uniforme em repouso com $\rho = \text{constante}$, conforme a Fig. 8.1.

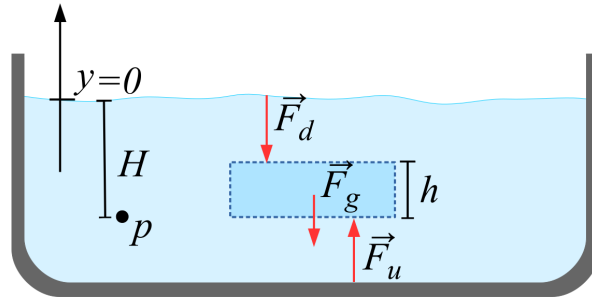


Figura 8.1: Forças agindo sobre um bloco imaginário imerso em um fluido incompressível.

Uma força $\vec{F}_d$ com módulo $P_d A$ e sentido negativo age sobre a superfície superior do bloco, enquanto que uma força $\vec{F}_u$ com módulo $P_u A$ e sentido positivo age sobre a superfície inferior do bloco, onde P_d e P_u são, respectivamente, as pressões exercidas sobre a face superior e inferior do bloco.

Uma vez que o bloco está em equilíbrio temos que

$$P_u A - P_d A + \rho A h g = 0, \quad (8.3)$$

¹1atm corresponde a $1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$.

onde g é a aceleração da gravidade, portanto

$$P_d = P_u + \rho gh = 0. \quad (8.4)$$

Ou seja, a pressão P_d em um ponto a uma profundidade h abaixo de um ponto em um líquido no qual a pressão é P_u é maior por um valor de ρgh .

Assim, considere um ponto p genérico a uma profundidade H como mostrado na Fig. 8.1. Se P_0 denotar a pressão atmosférica local e P a pressão no ponto p temos que

$$P = P_0 + \rho gH. \quad (8.5)$$

Essa expressão corresponde à Lei de Stevin que pode ser enunciada como:

*A pressão no interior de um fluido
aumenta linearmente com a profundidade.*

Se um recipiente é formado por diversos ramos que se comunicam entre si, continua valendo que a superfície livre de um líquido que ocupa as diferentes partes do recipiente é horizontal, ou seja, o líquido sobe à mesma altura em todos os ramos do recipiente. Por outro lado, se em dois ramos de um tubo em U como o ilustrado na Fig. 8.2 temos dois líquidos de densidades diferentes, $\rho_1 \neq \rho_2$, que não se misturam, cada um deles subirá a alturas diferentes em relação a um plano A-B que passa pelo mesmo fluido (ou pela interface entre os dois líquidos). Assim, se a pressão no plano A-B é P temos que

$$P = P_0 + \rho_1 gH_1 = P_0 + \rho_2 gH_2 \quad (8.6)$$

ou

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (8.7)$$

Assim, conhecendo uma das densidades e medindo H_1 e H_2 podemos obter experimentalmente o valor da densidade do outro líquido.

8.3 Materiais e métodos

8.3.1 Materiais

- Painel metálico com tubo em U
- Pipeta de Pasteur de plástico
- Pisseta com água
- Becker de 250 mL com óleo vegetal

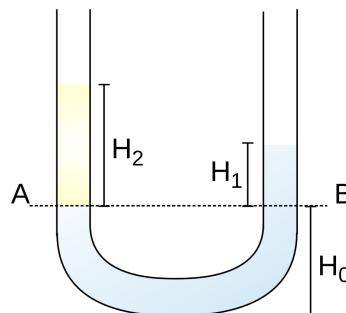


Figura 8.2: Tubo em U contendo líquidos em equilíbrio estático.

H_0 é a altura do menisco da interface água/óleo (linha A-B) até a base do tubo.

H_1 é a altura do menisco da extremidade que contém água até a interface água/óleo.

H_2 é a altura do menisco da extremidade que contém óleo até a interface água/óleo.

8.3.2 Procedimento experimental

- Posicione o tubo em U na vertical e com o auxílio de uma pisseta, coloque um pouco de água até uma altura qualquer (70 mm aproximadamente);
- Com a pipeta de Pasteur coloque aproximadamente 0,5 mL de óleo em um dos ramos. Observe na Fig. 8.2 quais são os pontos corretos para fazer as medidas e anote os valores de H_0 , H_1 e H_2 na Tabela 8.1;
- Adicione novamente aproximadamente 0,5 mL de óleo em seu respectivo ramo, determinando os novos valores de H_0 , H_1 e H_2 ;
- Faça um total de 5 adições e preencha a Tabela 8.1;

Medidas	H_0 (mm) menisco	H_1 (mm) água	H_2 (mm) óleo	Deslocamento h_1 ($H_1 - H_0$)	Deslocamento h_2 ($H_2 - H_0$)
1					
2					
3					
4					
5					
Média					

Tabela 8.1: Resultados obtidos no experimento de hidrostática.

8.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Determine a densidade ρ_2 do óleo utilizando a Eq. (8.7) e utilizando $\rho_1 = \rho_{gua} = 1000 \text{ kg/m}^3$. Verifique se este valor está de acordo com o esperado para óleos comerciais.
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 1: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 1: mecânica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Experimento 9

Princípio de Arquimedes

9.1 Objetivo

Determinar a densidade de um corpo sólido utilizando o Princípio de Arquimedes

9.2 Conceitos

O **Princípio de Arquimedes** pode ser enunciado como:

Quando um corpo está total ou parcialmente submerso em um fluido, uma força de empuxo

$$E = m_{fd}g \quad (9.1)$$

exercida sobre o fluido age sobre o corpo no sentido vertical para cima.

Na Eq. (9.1), g é a aceleração da gravidade e m_{fd} é a massa do volume de fluido deslocado. A **força de empuxo** tem módulo igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo.

A força de empuxo não é determinada pelas propriedades do objeto, exceto a quantidade de fluido que ele desloca. Assim, se vários objetos de diferentes densidades forem colocados em um mesmo recipiente contendo água, por exemplo, todos experimentarão a mesma força de empuxo. Esta força origina-se por causa da variação de pressão. De acordo com a Lei de Stevin temos que $P = P_0 + \rho_{fluido}gh$. Assim, a pressão é maior na parte inferior do corpo imerso do que na parte superior.

O que determina se um objeto livre colocado em um fluido afunda ou flutua é a relação entre a força de empuxo e a força gravitacional.

O ponto de aplicação do empuxo, C , é conhecido como centro de empuxo ou centro de carena e é igual ao centro de gravidade da parte submersa do corpo. Quando o corpo

está totalmente submerso, temos que $C = G$, onde G é o centro de gravidade do corpo. Se uma parte do corpo está emersa, temos que C estará abaixo de G .

No caso de um corpo livre completamente submerso, a empuxo é igual à força peso do corpo:

$$E = mg = \rho_{\text{corpo}} g V_{\text{corpo}}. \quad (9.2)$$

O **peso aparente** P_{ap} de um corpo flutuando em um fluido é dado por

$$P_{ap} = F_g - E, \quad (9.3)$$

onde F_g é o peso real do corpo. A Eq. (9.3) diz que um corpo imerso e um líquido tem peso aparente menor do que seu peso verdadeiro. Em particular, o peso aparente de um corpo flutuante é zero.

Durante a realização do experimento, o corpo cuja densidade queremos determinar estará vinculado ao um dinamômetro quando submerso. Dessa forma, as forças agindo sobre o corpo serão a força peso $F_g = mg$, o empuxo $E = \rho_{\text{fluido}} g V_{fd}$, e a força exercida F_{din} pelo dinamômetro, um instrumento que mede forças a partir da deformação causada por elas num sistema elástico. Assim,

$$F_g = F_{din} + E, \quad (9.4)$$

de onde obtemos

$$V_{\text{corpo}} = \frac{F_{din}}{(\rho_{\text{corpo}} - \rho_{\text{fluido}})g}. \quad (9.5)$$

9.3 Materiais e métodos

9.3.1 Materiais

- Suporte universal;
- Braço horizontal;
- Dinamômetro;
- Cilindro metálico;
- Balança semianalítica;
- Proveta 500 mL;
- Cilindro branco com gancho na ponta;

9.3.2 Procedimento experimental

- a) Verifique o “zero” do dinamômetro. Caso necessário, solte o parafuso e corrija a posição;
- b) Encaixe o cilindro branco no gancho na parte inferior do dinamômetro;
- c) Preencha a proveta com 400 mL de água. Movimente o braço horizontal (dinamômetro + cilindro) de modo que o cilindro fique totalmente submerso na água da proveta;
- d) Anote o volume de água deslocada pela submersão do cilindro e utilizando o dinamômetro, determine o peso aparente do cilindro branco quando totalmente submerso. Anote este valor;
- e) Utilizando a Eq. (9.5), calcule a densidade do material do cilindro.
- f) Pese o cilindro;
- g) Repita todo o procedimento utilizando agora o cilindro metálico.

9.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Utilizando a Eq. (9.5) calcule a densidade do material dos dois cilindros.
- Calcule novamente a sua densidade para os dois cilindros, utilizando a expressão $\rho = m/V$.
- Compare os valores obtidos através de cada um dos métodos.
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 1: mecânica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Experimento 10

Dilatação térmica

10.1 Objetivo

Determinar os coeficientes de dilatação térmica linear de alguns materiais.

10.2 Conceitos

Quando um sólido é submetido a uma variação de temperatura ΔT , verifica-se experimentalmente que as suas três dimensões sofrem variações. No entanto, dependendo da geometria do sólido, uma ou até duas dimensões podem apresentar variações desprezíveis. É o caso dos tubos metálicos finos e longos.

A partir de constatações empíricas, podemos afirmar que para a dilatação térmica linear:

I) A variação do comprimento é diretamente proporcional a variação da temperatura, ΔT ;

II) A variação do comprimento é diretamente proporcional ao comprimento inicial, L_0 ;

III) A variação do comprimento depende do material, ou seja, do coeficiente de dilatação linear α do material;

IV) Para o mesmo material, o coeficiente de dilatação depende da faixa de variação da temperatura

ΔT (ex. 0 a 100°C).

Assim, temos:

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T \quad (10.1)$$

10.3 Materiais e métodos

10.3.1 Materiais

- Dilatômetro linear;
- Sistema gerador de vapor;
- Chapa para aquecimento;
- Termômetro;
- Cronômetro manual;
- Multímetro;
- Termopar que conecta ao multímetro.

10.3.2 Procedimento experimental

- a) Ligue a chapa aquecedora na temperatura máxima;
- b) Ajuste o multímetro para medir temperatura ($^{\circ}\text{C}$) e anote a temperatura ambiente, que está sendo exibida no multímetro. Posicione o termopar acoplado ao multímetro no final do tubo, por dentro da mangueira;
- c) Anote o comprimento L_0 do tubo na temperatura ambiente. O valor será aquele onde está preso o parafuso guia;
- d) Verifique se a escala do medidor (relógio) está marcando zero. Caso seja necessário, gire o corpo do relógio para a direita ou para a esquerda até que o ponteiro grande marque zero. CUIDADO: O RELÓGIO É EXTREMAMENTE SENSÍVEL, ENTÃO, APÓS ESTA ETAPA, **NÃO** TOQUE NA BANCADA.
- e) Acompanhe a temperatura do sistema gerador de vapor pelo termômetro de vidro. Quando a temperatura estiver próxima aos 90°C , prepare-se para fazer as medidas;
- f) Quando o vapor estiver percorrendo o tubo, observe a variação da temperatura no multímetro e do comprimento (medido no relógio). Espere até que seja atingido o equilíbrio térmico (pelo menos 15 segundos após a estabilização dos valores nos instrumentos de medida);
- g) Anote a temperatura final, exibida no multímetro, e o valor da variação no comprimento da barra, exibida no medidor (relógio);

- h) Desligue a chapa aquecedora e simultaneamente dispare o cronômetro. A cada 1 minuto, anote o valor de T fornecido pelo multímetro e a variação no comprimento da barra exibida no medidor (relógio) até que o sistema retorne à temperatura ambiente;

10.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.
- Calcule o valor do coeficiente de dilatação linear do material α pelos dois métodos distintos descritos a seguir.
Método 1: utilize a Eq. (10.1) e os dados coletados durante a realização do experimento.
Método 2: faça um gráfico de ΔL versus ΔT partindo dos dados obtidos no item “h” da Seção 10.3.2.
- Para cada material, compare os valores de α obtidos pelo método 1, método 2 e valor fornecido na literatura.

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 2: oscilações, ondas e termodinâmica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Experimento 11

Dilatação térmica

11.1 Objetivo

Determinar os coeficientes de dilatação térmica linear de alguns materiais.

11.2 Conceitos

Do ponto de vista prático, quando permitimos que dois ou mais corpos troquem calor até atingirem o equilíbrio térmico, o fazemos dentro de um dispositivo chamado calorímetro, que evita trocas de calor com o meio externo. O calorímetro permite que determinemos experimentalmente o calor específico de uma substância (c_x).

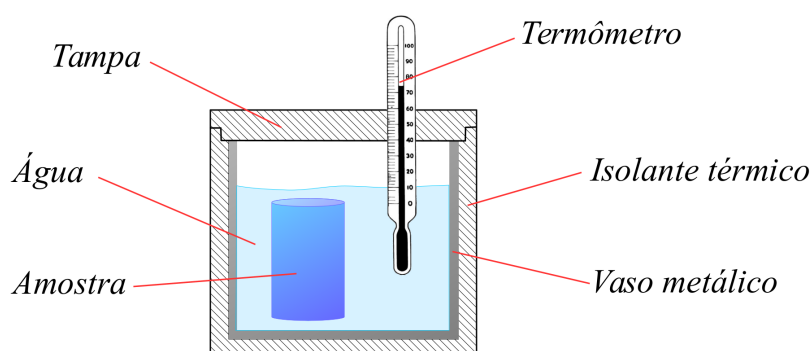


Figura 11.1: Diagrama de um calorímetro de cisturas

Basicamente, um calorímetro é constituído de um vaso calorimétrico metálico, revestido de material isolante para evitar troca de calor com o ambiente externo, conforme ilustrado na Fig. 11.1. Além disso, possui uma tampa que permite fechá-lo perfeitamente. Um termômetro, que fica sempre imerso, assinala a temperatura da água contida no calorímetro.

Para que a temperatura de um corpo homogêneo aumente deve-se fornecer calor ao mesmo. A transferência de calor é garantida pelo princípio termodinâmico que diz:

O fluxo de calor é sempre do corpo de maior temperatura para o de menor temperatura.

A quantidade de calor (Q) transferida é proporcional à massa (m) do corpo e a variação de temperatura (ΔT). Algebricamente temos:

$$Q = mc\Delta T, \quad (11.1)$$

onde c é o **calor específico**.

Deve-se notar que o calor específico é uma propriedade da substância, e, portanto, é uma importante constante física. Podemos definir ainda a **capacidade calorífica**: (C) de um sistema como sendo:

$$C = mc. \quad (11.2)$$

Na primeira parte do experimento vamos calcular a capacidade calorífica do calorímetro, utilizando o sistema formado pelo conjunto água fria, água quente e calorímetro, termicamente isolado.

Sendo Q_{cal} , $Q_{\text{água fria}}$ e $Q_{\text{água quente}}$ as quantidades de calor trocadas pelo calorímetro, pela água fria e pela água quente, respectivamente, temos, para o conjunto, a seguinte equação:

$$Q_{cal} + Q_{\text{água fria}} + Q_{\text{água quente}} = 0. \quad (11.3)$$

Tendo em vista a equação fundamental da calorimetria e admitindo que não haja mudanças de fase de nenhum dos elementos do conjunto, a Eq. (11.3) no equilíbrio térmico, pode ser escrita como

$$m_{cal}c_{cal}\Delta T_{cal} + m_{af}c_{af}\Delta T_{af} + m_{aq}c_{aq}\Delta T_{aq} = 0 \quad (11.4)$$

Aplicando a Eq. (11.2) para o calorímetro e desenvolvendo a Eq. (11.4) temos que

$$C_{cal}(T_{eq} - T_{aq}) + m_{af}c_{af}(T_{eq} - T_{af}) + m_{aq}c_{aq}(T_{eq} - T_{aq}) = 0, \quad (11.5)$$

onde: C_{cal} é a capacidade calorífica do calorímetro;

T_{eq} é a temperatura de equilíbrio térmico;

T_{aq} é a temperatura inicial da água quente;

m_{af} é a massa de água fria;

T_{af} é a temperatura inicial da água fria;

m_{aq} é a massa de água quente;

$c_{af} = c_{aq}$ é o calor específico da água (1 cal/g°C).

Na segunda parte do experimento, determinaremos o calor específico de um metal. Sendo Q_{cal} , Q_{agua} e Q_x as quantidades de calor trocadas pelo calorímetro, pela água e pelo corpo metálico, respectivamente. Temos a seguinte equação:

$$Q_{cal} + Q_{agua} + Q_x = 0. \quad (11.6)$$

Da mesma forma que anteriormente, admitindo que não haja mudanças de fase de nenhum dos elementos do conjunto, podemos reescrever a Eq. (11.6) como

$$m_{cal}c_{cal}\Delta T_{cal} + m_{aq}c_{aq}\Delta T_{aq} + m_xc_x\Delta T_x = 0 \quad (11.7)$$

ou

$$C(T_{eq} - T_{aq}) + m_{aq}c_{aq}(T_{eq} - T_{aq}) + m_xc_x(T_{eq} - T_x) = 0. \quad (11.8)$$

Da Eq.(11.8) temos que

$$c_x = \frac{(C + m_{aq}c_{aq})(T_{eq} - T_{aq})}{m_x(T_x - T_{eq})}, \quad (11.9)$$

onde: c_x é o calor específico da amostra;

C é a capacidade calorífica do calorímetro;

m_{aq} é a massa de água;

T_{eq} é a temperatura de equilíbrio térmico;

T_{aq} é a temperatura inicial da água;

m_x é a massa da amostra metálica;

T_x é a temperatura inicial da amostra;

c_{aq} é o calor específico da água (1 cal/g°C).

11.3 Materiais e métodos

11.3.1 Materiais

- Calorímetros de isopor identificados por Cal1 e Cal2;
- Chapa para aquecimento;
- Caneca de metal cheia de água;
- Multímetro;
- Termopar que conecta ao multímetro;

- Cilindros de metal;
- Balança semianalítica.

11.3.2 Procedimento experimental

PARTE 1 - Capacidade calorífica C do conjunto calorimétrico

- Ligue a chapa aquecedora na temperatura máxima;
- Meça a massa dos dois calorímetros: Cal1 sem tampa (m_{Cal1}) e Cal2 com tampa (m_{Cal2});
- Coloque água até a marca no vaso calorímetro Cal1, pese e anote a massa do conjunto ($m_{ConjuntoF}$);
- Acople a tampa com o termopar ao Cal1. Meça e anote a temperatura (T_{af}) do sistema frio;
- Aguarde até que a água da caneca metálica esteja em ebulição;
- Com cuidado**, adicione água quente ao calorímetro Cal2 até atingir a marca interna e **rapidamente** acople a tampa com o termopar para medir a temperatura (T_{aq}) do sistema quente. Anote o valor;
- Com movimentos rápidos, **porém em segurança**, adicione a massa de água fria no calorímetro 2 e anote a temperatura T_{eq} que do conjunto ao atingir o equilíbrio;
- Coloque a tampa no calorímetro 2 e pese o conjunto ($m_{ConjuntoQ}$);
- Repita o experimento 3 vezes.

Preencha as Tabelas 11.1 e 11.2 com suas medidas para facilitar a realização dos cálculos. Utilize $m_{af} = m_{ConjuntoF} - m_{Cal1}$ e $m_{aq} = m_{ConjuntoQ} - m_{af} - m_{Cal2}$.

m_{Cal1} (g)	m_{Cal2} (g)	$m_{ConjuntoF}$ (g)	$m_{ConjuntoQ}$ (g)

Tabela 11.1: Medidas experimentais para a determinação da capacidade térmica do calorímetro.

m_{af} (g)	m_{aq} (g)	T_{af} (°C)	T_{aq} (°C)	T_{eq} (°C)

Tabela 11.2: Medidas experimentais para a determinação da capacidade térmica do calorímetro.

PARTE 2 - Calor específico dos sólidos

- Meça a massa do sólido (m_{sol}) e anote o valor na Tabela 11.3. Depois coloque-o dentro do calorímetro 1 com água suficiente para cobrir toda a peça. Encaixe a tampa com o termopar e preencha a tabela com o valor da temperatura do sólido (T_{sol});
- Retire o sólido do calorímetro;
- No calorímetro 2, adicione água quente até a marca interna e meça a temperatura da água quente (T_{aq}) com a tampa que contém o termopar;
- Com muito cuidado, introduza **rapidamente** o sólido no calorímetro 2 e acople a tampa com o termopar. Espere a estabilização da temperatura e anote o valor da temperatura de equilíbrio (T_{eq}) do conjunto;
- Após medir a temperatura, pese o conjunto ($m_{conjunto}$) e anote o valor na Tabela 11.3;
- Repita o processo 3 vezes.

Na Tabela 11.3 utilize $m_{aq} = m_{conjunto} - m_{sol} - m_{Cal2}$.

Material	$m_{conjunto}$ (g)	m_{sol} (g)	T_{sol} (°C)	T_{aq} (°C)	T_{eq} (°C)

Tabela 11.3: Medidas experimentais para a determinação do calor específico dos sólidos.

11.4 Para o relatório

- Organize os valores medidos e os dados obtidos em tabelas.
- Apresente todos os cálculos explicitamente e considere os desvios associados às incertezas de todas as medidas realizadas em laboratório.
- Utilizando os valores obtidos na *PARTE 1* do experimento na Eq. (11.5), calcule a capacidade calorífica (C) do calorímetro.
- Com os dados da *PARTE 2*, calcule o valor de c_x para o sólido utilizando a Eq. (11.9).
- Compare o valor obtido com o valor do calor específico encontrado na literatura. ($c_{Al} = 0,22 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$, $c_{Cu} = 0,093 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$, $c_{latao} = 0,092 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$).

Referências

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JEWETT JR., J.W.; SERWAY, R.A.; Física para Cientistas e Engenheiros, volume 2: oscilações, ondas e termodinâmica. Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Apêndice I

Medição e propagação de erros

1 – Sistema de unidades padrão

Para facilitar o comércio internacional, diversos países criaram padrões comuns para medir grandezas através de um acordo internacional.

A 14ª Conferência Geral sobre Pesos e Medidas (1971) elegeu as *sete grandezas físicas fundamentais*, que constituem a base do Sistema Internacional de Unidades (SI): comprimento, massa, tempo, intensidade de corrente elétrica, temperatura, quantidade de matéria e intensidade luminosa.

- *metro* [m]: unidade de comprimento. É o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de $1/299.792.458$ de segundo.
- *quilograma* [kg]: unidade de massa. É a massa do protótipo internacional do quilograma existente no Instituto Internacional de Pesos e Medidas em Sèvres, na França.
- *segundo* [s]: unidade de tempo. É a duração de $9.192.631.770$ períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio-133.
- *ampère* [A]: unidade de corrente elétrica. É a intensidade de uma corrente elétrica constante que, mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito, de seção circular desprezível e situados à distância de um metro entre si, no vácuo, produz entre esses dois condutores uma força igual a 2×10^{-7} newton por metro de comprimento.
- *kelvin* [K]: unidade de temperatura termodinâmica. É a fração $1/273,16$ da temperatura termodinâmica do ponto triplice da água.
- *mol* [mol]: unidade de quantidade de matéria. É a quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quantos átomos existem em $0,012$ quilogramas de carbono-12.
- *candela* [cd]: unidade de intensidade luminosa. É a intensidade luminosa, numa dada direção de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência 540×10^{12} hertz ($1 \text{ hertz} = 1 / \text{segundo}$) e cuja intensidade energética nessa direção é de

$1/683$ watts ($1 \text{ Watt} = 1 \text{ Joule} / \text{segundo}$) por esferoradiano.

2 – Medições

É conveniente definir o significado dos termos *medição*, *medida(s)*, *dados experimentais* e *resultados experimentais*.

- *Medição* é o ato ou efeito de medir
- *Medida* é o termo usado para se referir ao valor numérico (e unidade padrão) resultante de uma dada medição
- *Dados experimentais* são os valores obtidos nas medições diretas
- *Resultados Experimentais* são, geralmente, os valores obtidos após serem realizados cálculos com os dados experimentais.

Os *resultados experimentais* podem ser obtidos de duas maneiras: através de *medições diretas* ou de *medições indiretas*.

3 – Incertezas de uma medida

Um dos princípios básicos da física diz: “Não se pode medir uma grandeza física com precisão absoluta”, ou seja, “qualquer medição, por mais bem feita que seja, é sempre aproximada”.

De acordo com o princípio descrito no parágrafo anterior, o valor medido nunca representa o *valor verdadeiro* da grandeza, pois este nunca é conhecido com total certeza. Quando este resultado (número e unidade) vai ser aplicado ou registrado é necessário saber com que *confiança* se pode dizer que o número obtido representa a grandeza física. O valor medido ou o resultado deve ser expresso com a *incerteza da medida*, utilizando uma representação em uma linguagem universal, fazendo com que seja compreensível a outras pessoas.

Chama-se *valor verdadeiro* ou *valor do mensurando* ao valor que seria obtido se a medição da grandeza fosse feita de maneira perfeita e com instrumentos perfeitos.

Por isso, deve-se necessariamente associar um *erro* ou *desvio* ao valor de qualquer medida.

É importante salientar que a palavra *erro* não tem, aqui, o significado de distração, descuido ou engano,



Medição e propagação de erros

pois estes podem ser evitados, enquanto o *erro experimental* não pode ser evitado, mesmo nas medições mais precisas.

4 – Algarismos significativos

Ao expressar uma medida é necessário saber expressar o número de algarismos com que se pode escrever tal medida, a unidade e o grau de confiança do valor expresso, ou seja, é necessário incluir uma *primeira estimativa de incerteza*. O erro de uma medida é classificado como incerteza do tipo *A* ou incerteza do tipo *B*. A incerteza obtida a partir de várias medições é chamada de *incerteza padrão do tipo A*, que é o desvio padrão determinado por métodos estatísticos. A incerteza estimada em uma única medição é classificada como *incerteza padrão tipo B*, que é a incerteza obtida por qualquer método que não seja estatístico.

Um exemplo da incerteza do tipo *B* é apresentado na Figura 1, medida obtida com uma única medição do comprimento *S* de um lápis, utilizando uma régua com menor divisão em mm.

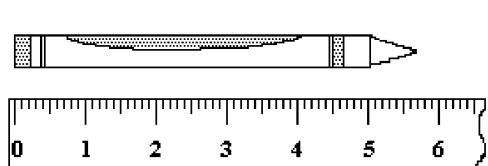


Figura 1 - Medição do comprimento de um lápis utilizando uma régua com escala de 1 mm.

A incerteza pode ser estimada como sendo a *metade da menor divisão da escala* do equipamento utilizado. A estimativa da incerteza é uma avaliação visual, podendo ser considerada uma fração da menor divisão da escala, feita mentalmente por quem realiza a medição.

A medida do comprimento do lápis, obtida na Figura 2 é:

$$S = 5,75 \pm 0,05 \text{ cm}$$

O resultado é apresentado com três algarismos significativos. A incerteza ou erro na medida é representado pelo termo 0,05 cm ou 0,5 mm, que é a metade da menor divisão da escala do equipamento.

Este procedimento só pode ser adotado quando houver segurança de quem realiza a medição, ao avaliar visualmente uma casa decimal a mais que a descrita na escala do equipamento. Caso contrário a incerteza deve ser considerada a menor divisão da escala do equipamento.

Os algarismos significativos do comprimento do lápis são representados por algarismos corretos e pelo primeiro algarismo duvidoso, de acordo com a descrição abaixo:

algarismos significativos	=	algarismos corretos	+	primeiro algarismo duvidoso
↓		↓		↓
5,75		5,75		5,75

5 – Operações aritméticas

Medidas devem ser escritas com o número correto de algarismos significativos, omitindo todos os algarismos sobre os quais não se tem informação. Ao efetuar alguma operação com tais números, não se deve escrever algarismos sem significado. A seguir são apresentados exemplos e regras simples para operações aritméticas com números que representem medidas.

A adição ou subtração de números que possuem algarismos significativos é feita com o alinhamento das casas decimais, sendo completados com zero, da mesma forma que em uma operação aritmética de soma e subtração convencional. Ao final da operação, o número de algarismos significativos do resultado é o mesmo do elemento somado com menor precisão. Consideremos como exemplo a adição dos seguintes valores de comprimento: 83mm + 83,4mm + 83,52mm. Os valores são organizados da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r} 83 \quad \text{mm} \\ 83,4 \quad \text{mm} \\ 83,52 \quad \text{mm} \\ \hline 249,92 \quad \text{mm} \end{array}$$

O resultado desta operação é 250 mm.

A multiplicação ou divisão de números com algarismos significativos também deve ser feita como na forma. No resultado final o número de algarismos



Medição e propagação de erros

significativos do produto ou da divisão de dois ou mais números (medidas) deve ser igual ao número de algarismos significativos do fator menos preciso.

Consideremos como exemplo, a multiplicação dos valores dos comprimentos 83,4 mm e 83 mm. A operação é escrita como:

$$\begin{array}{r} 83,4 \text{ mm} \\ \times 83 \text{ mm} \\ \hline 02502 \\ 6672 \\ \hline 6922,2 \end{array}$$

O resultado da operação é $69 \times 10^2 \text{ mm}^2$ ou ainda $6,9 \times 10^3 \text{ mm}^2$.

6 – Regras de arredondamento

O arredondamento dos números é feito de acordo com as seguintes regras:

- Os algarismos 1,2,3,4 são arredondados para baixo, isto é, o algarismo precedente é mantido inalterado. Por exemplo: 3,14 e 2,73 são arredondados para 3,1 e 2,7 respectivamente.
 - Os algarismos 6,7,8,9 são arredondados para cima, isto é, o algarismo precedente é aumentado de 1. Por exemplo: 3,16 e 2,78 são arredondados para 3,2 e 2,8 respectivamente.
- Para o algarismo 5 é utilizada a seguinte regra: 5 é arredondado para baixo sempre que o algarismo precedente for par e, é arredondado para cima sempre que o algarismo precedente for ímpar. Por exemplo: 4,65 e 4,75 são arredondados para 4,6 e 4,8 respectivamente.

7 – Erros ou desvios

Os erros podem ser classificados em dois grandes grupos: *erros sistemáticos* ou *erros aleatórios*.

Os *erros sistemáticos* são aqueles que resultam das discrepâncias observacionais persistentes, tais como erros de paralaxe. Os erros sistemáticos ocorrem principalmente em experimentos que estão sujeitos a mudanças de temperatura, pressão e umidade. Estas mudanças estão relacionadas a condições ambientais. Os *erros sistemáticos* podem e devem ser eliminados ou minimizados pelo experimentador. Isso pode ser feito, observando se os instrumentos estão corretamente

ajustados e calibrados, e ainda se estão sendo usados de forma correta na interligação com outros instrumentos, na montagem experimental.

Existe um limite abaixo do qual não é possível reduzir o erro sistemático de uma medição. Um destes erros é o de calibração, diretamente associado ao instrumento com o qual se faz a medição. Este tipo de erro é também chamado *erro sistemático residual*. Geralmente, o erro de calibração (residual) vem indicado no instrumento ou manual, pelo fabricante; é o limite dentro do qual o fabricante garante os erros do instrumento.

Os *erros aleatórios* (ou estatísticos) são aqueles que ainda existem mesmo quando todas as discrepâncias sistemáticas num processo de mensuração são minimizadas, balanceadas ou corrigidas. Os *erros aleatórios* jamais podem ser eliminados por completo.

6 – Desvio padrão amostral e populacional

Define-se *desvio padrão amostral* ou *desvio médio quadrático*, a raiz quadrada da variância amostral, descrita pela relação:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (1)$$

O valor de s fornece uma idéia sobre a **incerteza padrão (incerteza típica)** de qualquer medida, tendo como base o conjunto das N medidas. O parâmetro s pode ser interpretado como sendo a incerteza que se pode esperar, dentro de certa probabilidade, se uma $(N+1)$ -ésima medição viesse a ser realizada, quando já se conhece o que ocorreu nas N medições anteriores. O desvio padrão amostral indica uma boa avaliação sobre a distribuição das medidas, em torno do valor médio.

Considerando um conjunto de dados experimentais, são apresentados na Tabela I, alguns parâmetros estatísticos como: o seu valor médio, o seu desvio experimental médio, o seu desvio absoluto médio e o seu desvio quadrático médio.



Medição e propagação de erros

Tabela I - Parâmetros estatísticos de um conjunto de dados obtidos com a medição da massa de um cilindro metálico, utilizando uma balança de braço.

Parâmetro	Definição	Resultado
Valor médio	$\bar{x} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} x_i$	$\bar{x} = 43,560050 \text{ g}$
Desvio absoluto	$\bar{d}_{abs} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} x_i - \bar{x} $	$\bar{d}_{abs} = 0,011364 \text{ g}$
Desvio relativo	$\bar{d}_{rel} = \frac{\bar{d}_{abs}}{\bar{x}}$	$\bar{d}_{rel} = 0,000261$
Desvio percentual	$\bar{d}_{\%} = 100\bar{d}_{rel}$	$\bar{d}_{\%} = 0,026088 \%$
Desvio padrão	$s = \sqrt{\frac{1}{200-1} \sum_{i=1}^{200} (x_i - \bar{x})^2}$	$s = 0,015021 \text{ g}$

A partir dos resultados apresentados na Tabela I, supõe-se que as medidas foram realizadas com muito cuidado pois o desvio percentual tem um valor muito abaixo de 1%. Os resultados foram tratados com 2 dígitos depois da vírgula, mas a balança permitia a obtenção dos valores até o primeiro dígito. Esta aparente irregularidade resulta do fato de que o segundo dígito foi obtido através da inferência nas medidas. O resultado numérico só pode ser escrito até o terceiro dígito depois da vírgula, devido às regras sobre algarismos significativos.

Na expressão (2), é apresentada a definição do desvio padrão da $\bar{x}$.

$$\sigma_m \cong \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (1)$$

Esta expressão é a que apresenta maior interesse, pois ela indica a maior ou menor incerteza da média $\bar{x}$ em relação a uma média mais geral, que seria a média de diversas médias. Uma média mais geral seria a média de K conjuntos, cada um com M medidas. Obviamente,

$$\sigma_{\bar{x}} < \sigma$$

Assim, o resultado de uma série de N medições pode ser escrita como:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \quad (3-47)$$

A cada valor medido isolado adicionado aos N valores previamente utilizados, modifica o valor médio $\bar{x}$ resultante. Porém, $\sigma_{\bar{x}}$ será tanto menor quanto maior o número N , ou quanto maior o número K , de conjuntos com N medidas. Com isto, oscilações irregulares (δx_j), são cada vez menores, fazendo com que o valor médio se aproxime assintoticamente de um valor final quando $N \rightarrow \infty$. Um número de medições excessivo não compensa o tempo gasto, pois, ao invés de se repetir mais e mais vezes as medições, é preferível uma realização cuidadosa de uma série, de umas 10 medições, para assegurar a qualidade do resultado. De acordo com a teoria de erros, se forem realizadas N medições, o desvio (σ) diminuirá para $1/\sqrt{N}$ do valor inicial. Portanto, pode ser utilizada a relação (2), especialmente em trabalhos de Laboratório de Ensino, onde não são exigidas grandes precisões.

8 – Intervalo de confiança

O desvio padrão σ é uma medida, que permite fornecer intervalos que quantificam a qualidade das medidas, indicando qual é a probabilidade mais provável de encontrar as medidas nesse intervalo, conforme os desvios vão se afastando do ponto de valor médio. Podemos ver a quantificação do fator de confiança em relação aos intervalos limitados por valores inteiros de desvio padrão, no quadro abaixo:

Tabela II – Relação entre o intervalo da variável, o fator de confiança, e a probabilidade de encontrar a medida dentro do intervalo.

Intervalo	Fator de confiança	Probabilidade
$[-\sigma, +\sigma]$	$\alpha = 0,683$	68,3%
$[-2\sigma, +2\sigma]$	$\alpha = 0,954$	95,4%
$[-3\sigma, +3\sigma]$	$\alpha = 0,997$	99,7%

Assim, praticamente quase todas as flutuações aleatórias dos valores medidos se situam na faixa de $\{\bar{x} \pm 3\sigma\}$, ou seja, do fator de confiança $\alpha = 0,997$. Isto significa que apenas 3 dentro de 1000 medidas podem estar fora da faixa. Normalmente, é praxe rejeitar os erros que excedam esta faixa, considerando, que eles não sejam mais erros aleatórios, mas sim enganos.



Medição e propagação de erros

9 – Propagação de erros ou desvios

Na maioria dos experimentos, a medição de uma grandeza R de interesse é feita de maneira indireta, sendo esta grandeza obtida a partir de medidas de n grandezas primárias $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_n\}$. O cálculo de R é feito a partir de uma função conhecida das grandezas primárias. Estas grandezas são também denominadas *grandezas de entrada*, enquanto a grandeza R é denominada *grandeza de saída*. Um exemplo é o cálculo da densidade de um objeto (grandeza R), no qual se mede a massa e o volume do corpo. As grandezas massa e volume são chamadas grandezas de entrada. Os valores das grandezas de entrada provêm, todos ou em parte, de medições diretas. Em linguagem formal escrevemos:

$$R = R(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \quad (1)$$

Utilizando aproximações e um grande número de medidas (amostras), podemos admitir que o valor médio seja considerado o valor verdadeiro. Da mesma forma, a incerteza padrão pode ser considerada como o desvio padrão verdadeiro.

Fazendo um desenvolvimento matemático apropriado, temos uma expressão para o cálculo da incerteza padrão da grandeza de saída.

$$\sigma_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial a_1}\right)^2 (\sigma_{\bar{a}_1})^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial a_2}\right)^2 (\sigma_{\bar{a}_2})^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial a_n}\right)^2 (\sigma_{\bar{a}_n})^2} \quad (2)$$

Esta expressão para a incerteza padrão da grandeza de saída, também chamada de *incerteza padrão combinada*, é utilizada quando as grandezas de entrada $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ são medidas repetidas vezes, gerando valores médios $\bar{a}_k$ e desvios padrão das médias $\sigma_{\bar{a}_k}$.

Em muitas situações não é necessário muito rigor quanto à exatidão nos valores das incertezas combinadas, sendo aceitável que sejam usadas expressões para obter valores aproximados das grandezas de interesse. Neste caso, quando é realizada apenas uma medição isolada (e não uma série de medições) devemos usar o conceito de *limite máximo de erro*.

Consideremos o caso em que se deseja calcular a incerteza padrão propagada no valor de uma grandeza

de saída R , com relação funcional do tipo $R = a + b$. São realizadas medições diretas das grandezas de entrada a e b , com suas respectivas incertezas padrão $\sigma_{\bar{a}}$ e $\sigma_{\bar{b}}$. Neste caso, as grandezas $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são equivalentes às grandezas a_1 e a_2 , contidas na equação (2), da qual se obtém:

$$\sigma_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^2 (\sigma_{\bar{a}})^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial b}\right)^2 (\sigma_{\bar{b}})^2}$$

$$\sigma_{\bar{R}} = \sqrt{(\sigma_{\bar{a}})^2 + (\sigma_{\bar{b}})^2}$$

Sendo a forma final para grandeza combinada e sua incerteza padrão combinada escrita como:

$$R \pm \sigma_{\bar{R}} = (\bar{a} + \bar{b}) \pm \sqrt{(\sigma_{\bar{a}})^2 + (\sigma_{\bar{b}})^2}$$

Na Tabela são apresentadas as expressões para o cálculo da incerteza padrão em grandezas combinadas, utilizando a propagação de erro para diversas relações funcionais.

Referências Bibliográficas

1. Domiciano, J. B., Juraltis K. R., “Introdução ao laboratório de Física Experimental”, Departamento de Física, Universidade Estadual de Londrina, 2003.
2. Vuolo, J. H. – “Fundamentos da Teoria de Erros” – Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1992.



Medição e propagação de erros

Tabela III - Expressões para cálculos das incertezas combinadas ou propagadas de algumas grandezas R que possuem formas funcionais simples.

Relação funcional	Erro propagado
$\bar{R} = R(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$	$\sigma_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial a_1}\right)^2 \sigma_{\bar{a}_1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial a_2}\right)^2 \sigma_{\bar{a}_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial a_n}\right)^2 \sigma_{\bar{a}_n}^2}$
$\bar{R} = \bar{a} \pm \bar{b}$	$(\sigma_{\bar{R}})^2 = (\sigma_{\bar{a}})^2 + (\sigma_{\bar{b}})^2$
$\bar{R} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ ou $\bar{R} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$	$\left(\frac{\sigma_{\bar{R}}}{\bar{R}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{b}}}{\bar{b}}\right)^2$
$\bar{R} = \bar{a}^r$	$\frac{\sigma_{\bar{R}}}{\bar{R}} = r \frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}}$
$\bar{R} = \ln \bar{a}$	$\sigma_{\bar{R}} = \frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}}$
$\bar{R} = e^{\bar{a}}$	$\frac{\sigma_{\bar{R}}}{\bar{R}} = \sigma_{\bar{a}}$

Apêndice II

Caso não seja possível usar o desvio padrão da média, utilize a propagação de erros simplificada conforme as regras a seguir. Nesse caso, a incerteza padrão será considerada como metade da menor divisão da escala.

Seja: $a = (\bar{x} \pm \Delta x)$ e $b = (\bar{y} \pm \Delta y)$

1 – Adição: $a + b = (\bar{x} \pm \Delta x) + (\bar{y} \pm \Delta y) = (\bar{x} + \bar{y}) \pm (\Delta x + \Delta y)$

2 – Subtração: $a - b = (\bar{x} \pm \Delta x) - (\bar{y} \pm \Delta y) = (\bar{x} - \bar{y}) \pm (\Delta x + \Delta y)$

3 – Multiplicação: $a \cdot b = (\bar{x} \pm \Delta x) \cdot (\bar{y} \pm \Delta y) = (\bar{x} \cdot \bar{y}) \pm (\bar{x} \cdot \Delta y + \bar{y} \cdot \Delta x)$

4 – Multiplicação por uma constante c : $c \cdot a = c(\bar{x} \pm \Delta x) = c \cdot \bar{x} \pm c \cdot \Delta x$

5 – Divisão: $\frac{a}{b} = \frac{\bar{x} \pm \Delta x}{\bar{y} \pm \Delta y} = \left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) \pm (\bar{x} \cdot \Delta y + \bar{y} \cdot \Delta x) / \bar{y}^2$

6 – Cosseno: $\cos(a) = \cos(\bar{x} \pm \Delta x) = \cos \bar{x} \pm \Delta x \cdot \text{sen } \bar{x}$

7 – Seno: $\text{sen}(a) = \text{sen}(\bar{x} \pm \Delta x) = \text{sen } \bar{x} \pm \Delta x \cdot \cos \bar{x}$

8 – Logaritmo: $\log(a) = \log(\bar{x} \pm \Delta x) = \log \bar{x} \pm \Delta x / \bar{x}$

9 – Exponencial: $c^a = c^{\bar{x} \pm \Delta x} = c^{\bar{x}} \pm (c^{\bar{x}} \ln c) \Delta x$

10 – Raiz Quadrada: $(\bar{x} \pm \Delta x)^{1/2} = \sqrt{\bar{x}} \pm \frac{\Delta x}{2\sqrt{\bar{x}}}$

FONTE: Apostila de Laboratório de Física I - UNESP Câmpus São João da Boa Vista.